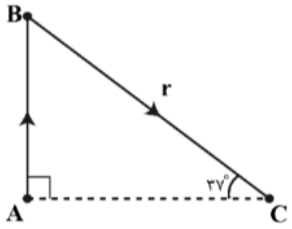
۱



با فرض اینکه اندازهٔ وتر مثلث قائم‌الزاویه برابر r باشد، با استفاده از شکل زیر، داریم:

$$\sin ۳۷^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \rightarrow ۰/۶ = \frac{\overline{AB}}{r} \rightarrow \overline{AB} = ۰/۶r$$

$$\cos ۳۷^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \rightarrow ۰/۸ = \frac{\overline{AC}}{r} \rightarrow \overline{AC} = ۰/۸r$$

اکنون می‌توان مسافت طی شده توسط متحرک و اندازهٔ جابجایی آن را بدست آورد:

$$L = \overline{AB} + \overline{BC} = ۰/۶r + r = ۱/۶r$$

$$|\vec{d}| = \overline{AC} = ۰/۸r$$

در پایان با استفاده از تعریف تندی و سرعت متوسط برای متحرک که مسیر $\overline{ABC}$ را در مدت Δt پیموده است، داریم:

$$(S_{av} = \frac{L}{\Delta t} \quad , \quad |\vec{V}_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t}) \rightarrow$$

$$\frac{S_{av}}{|\vec{V}_{av}|} = \frac{L}{|\vec{d}|} = \frac{۱/۶r}{۰/۸r} = ۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲

با فرض اینکه Δt زمان لازم برای پیموده شدن مسیر AB و $\Delta t'$ زمان لازم برای پیموده شدن مسیر BC توسط شخص مورد نظر باشد، زمان لازم برای پیمودن کل مسیر توسط شخص برابر $\Delta t'' = \Delta t + \Delta t'$ خواهد بود، بنابراین با توجه به اطلاعات داده شده در تست، داریم:

$$S_{AB} = \frac{L_{AB}}{\Delta t} = \frac{x_B - x_A}{\Delta t} \rightarrow ۲ = \frac{x_B - ۳}{\Delta t} \rightarrow \Delta t = \frac{x_B - ۳}{۲} \quad (I)$$

$$S_{BC} = \frac{L_{BC}}{\Delta t'} = \frac{|x_C - x_B|}{\Delta t'} \rightarrow ۱ = \frac{|-۵ - x_B|}{\Delta t'} = \frac{۵ + x_B}{\Delta t'} \rightarrow \Delta t' = ۵ + x_B \quad (II)$$

$$V_{ABC} = \frac{d_{ABC}}{\Delta t''} = \frac{|x_C - x_A|}{\Delta t''} \rightarrow ۰/۴ = \frac{|-۵ - ۳|}{\Delta t + \Delta t'} \rightarrow$$

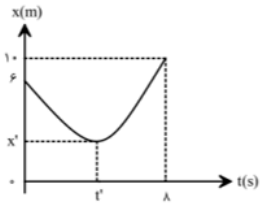
$$۰/۴ = \frac{۸}{\Delta t + \Delta t'} \rightarrow \Delta t + \Delta t' = ۲۰ \xrightarrow{(I),(II)} \frac{x_B - ۳}{۲} + ۵ + x_B = ۲۰ \rightarrow$$

$$\frac{x_B - ۳}{۲} + x_B = ۱۵ \rightarrow x_B - ۳ + ۲x_B = ۳۰ \rightarrow ۳x_B = ۳۳ \rightarrow x_B = ۱۱m$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳

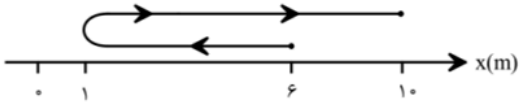


با توجه به نمودار، در لحظهٔ t' فرض کنیم که متحرک در مکان x' است.
از لحظهٔ ۰ تا t' از مکان $x=۶m$ به مکان $x=x'$ آمده و از لحظهٔ t' تا $۸s$ نیز از مکان x' به مکان $x=۱۰m$ رفته است.

$x_۱=۶m$ مکان اولیه و $x_۲=۱۰m \Rightarrow x_۲-x_۱=۱۰-۶=۴m \Rightarrow \Delta x=۴m$ مکان ثانویه

اندازهٔ جابه‌جایی از لحظهٔ t' تا $t'+۸s$ = مسافت طی شده از لحظهٔ ۰ تا t'

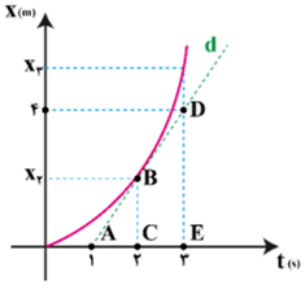
$$L=۶-x'+۱۰-x'=۱۶-۲x'(m) \xrightarrow{L=۳/۵|\Delta x|} ۱۶-۲x'=۳/۵\times۴ \rightarrow ۱۶-۲x'=۱۴ \Rightarrow ۲x'=۲ \Rightarrow x'=۱m$$



مبدأ حرکت، $x=۶m$ است و با توجه به شکل بالا، حداکثر فاصلهٔ متحرک از مبدأ حرکت، ۵ متر است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴



گام اول: سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۲s$ برابر شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه می‌باشد، پس:

$$V_۲=m_d=\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=\frac{۴-۰}{۳-۱}=\frac{۴}{۲}=۲ \rightarrow V_۲=۲\frac{m}{s}$$

از طرفی سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۲s$ برابر با سرعت متوسط متحرک بین دو لحظهٔ $t=۰$ تا $t=۳s$ می‌باشد، بنابراین:

$$V_۲=V_{av(۰,۳)} \rightarrow ۲=\frac{x_۳-x_۰}{t_۳-t_۰} \rightarrow ۲=\frac{x_۳-۰}{۳-۰} \rightarrow x_۳=۶m$$

گام دوم: برای محاسبهٔ سرعت متوسط متحرک بین دو لحظهٔ $t=۲s$ و $t=۳s$ لازم است تا مکان متحرک را در لحظهٔ $t=۲s$ بدانیم، برای این منظور چون دو مثلث ABC و ADE متشابهند، داریم:

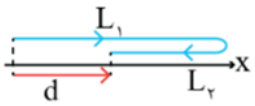
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} \rightarrow \frac{x_۲}{۴}=\frac{۲-۱}{۳-۱} \rightarrow \frac{x_۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \rightarrow x_۲=۲m$$

$$V_{av(۲,۳)}=\frac{x_۳-x_۲}{t_۳-t_۲}=\frac{۶-۲}{۳-۲}=\frac{۴}{۱}=۴\frac{m}{s}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵

چون حرکت روی خط راست انجام شده و سرعت متوسط و تندی متوسط برابر نیست پس تغییر جهت داریم و با توجه به اینکه فقط یک بار تغییر جهت داریم، پس مسیر حرکت مطابق شکل مقابل می‌تواند باشد:



$$\frac{v_{av}}{s_{av}}=\frac{d}{L} \rightarrow ۰/۶=\frac{x_۲-x_۱}{x_۱+x_۲}=\frac{L_۱-L_۲}{L_۱+L_۲}$$

$$\rightarrow ۰/۶L_۱+۰/۶L_۲=L_۱-L_۲ \rightarrow ۱/۶L_۲=۰/۴L_۱ \rightarrow ۴L_۲=L_۱$$

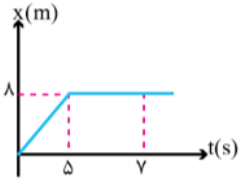
$$\rightarrow \frac{L_۲}{L_۱}=\frac{۱}{۴}=۰/۲۵ \xrightarrow{\text{به درصد}} \frac{L_۲}{L_۱}\times۱۰۰=۲۵\%$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۶

۱) ابتدا شتاب متوسط در ۷s نخست یعنی ۰ تا ۷s را بدست می‌آوریم، برای این منظور باید ابتدا سرعت در $t=0$ و سرعت در $t=7s$ را بدست آوریم:



$v(t=0)=$ شیب خط در بازهٔ ۰ تا ۵s $=\frac{8}{5}=1/6\frac{m}{s}$

$v(t=7s)=$ شیب خط در بازهٔ ۵s تا ۷s $=0$

$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0-1/6}{7}=\frac{-1/6}{7}\frac{m}{s^2}$

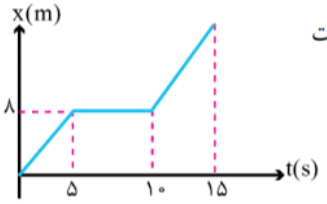
۲) بزرگی شتاب در بازهٔ ۰ تا ۷s با بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ ۷s تا ۱۴s برابر است:

$$|a_{av}(14s\text{ تا }7s)|=|a_{av}(7s\text{ تا }0)|\rightarrow a_{av}(14s\text{ تا }7s)=\frac{1/6}{7}\frac{m}{s^2}$$

۳) سرعت در لحظهٔ $t=7s$ برابر صفر است پس سرعت در لحظهٔ ۱۴s را بدست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{v_{14}-v_7}{14-7}=\frac{1/6}{7}\rightarrow v_{14}-0=1/6\rightarrow v_{14}=1/6\frac{m}{s}$$

۴) بنابراین شیب خط در بازهٔ ۱۰s تا ۱۴s برابر سرعت متحرک در ۱۴s یعنی $1/6\frac{m}{s}$ است و چون نمودار خطی است

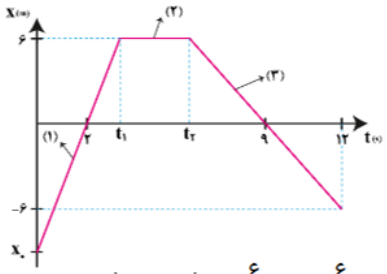


پس شیب در بازهٔ ۱۰s تا ۱۲s نیز همان $1/6\frac{m}{s}$ است:

$v_{14}=$ شیب خط در بازهٔ ۱۰s تا ۱۲s $\rightarrow 1/6=\frac{x'-8}{12-10}\rightarrow 1/6=\frac{x'-8}{2}\rightarrow x'-8=3/2\rightarrow x'=11/2m$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷



با توجه به نمودار داده شده، متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 توقف کرده است، بنابراین:

$$t_2-t_1=3s \quad (I)$$

از طرفی با توجه به نام‌گذاری سه بخش از نمودار به صورت (۱)، (۲) و (۳)، داریم:

(۳) بخش : $|\text{شیب خط}|=\frac{6}{9-t_2}=\frac{6}{12-9}\rightarrow\frac{6}{9-t_2}=2\rightarrow 9-t_2=3\rightarrow t_2=6s$

(I) رابطهٔ : $t_2-t_1=3\rightarrow 6-t_1=3\rightarrow t_1=3s$

(۱) بخش : $|\text{شیب خط}|=\frac{6}{t_1-2}=\frac{|x_0|}{2}\rightarrow\frac{6}{3-2}=\frac{|x_0|}{2}\rightarrow$

$$6=\frac{|x_0|}{2}\rightarrow|x_0|=12m$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸

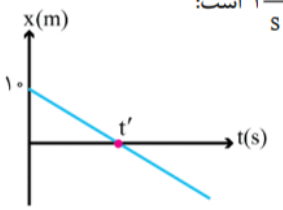
در حرکت با سرعت ثابت متحرک تغییر جهت نمی‌دهد پس تندی متوسط و بزرگی سرعت متوسط با هم برابر است:

$$s_{av}=|v_{av}|$$

در حرکت با سرعت ثابت بدلیل ثابت ماندن سرعت، سرعت متوسط در هر بازه‌ای با سرعت لحظه‌ای در هر لحظه با هم برابرند.

$$\begin{matrix} v_{av}=v \\ s_{av}=|v_{av}| \end{matrix} \rightarrow \quad s_{av}=|v|$$

با توجه به نمودار شیب خط منفی بوده و سرعت منفی است و هم‌چنین در سؤال گفته شده تندی متوسط در $30\,s$ نخست $1\frac{m}{s}$ است:



$$|v|=s_{av} \xrightarrow[s_{av}=1\frac{m}{s}]{} |v|=1\frac{m}{s} \rightarrow v=-1\frac{m}{s}$$

$$\text{معادلهٔ حرکت } x=vt+x_0 \xrightarrow[x_0=10\,m]{v=-1\frac{m}{s}} x=-t+10$$

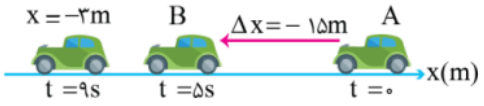
در بازهٔ ۰ تا t' با توجه به نمودار، مکان متحرک مثبت بوده و بردار مکان متحرک در جهت مثبت محور xها است، در لحظهٔ t' مکان متحرک صفر شده است:

$$x=-t+10 \xrightarrow{x=0} 0=-t+10 \rightarrow t=10\,s$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹

ابتدا مسیر حرکت را مشخص می‌کنیم:



$$AB: v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-15}{5}=-3\frac{m}{s}$$

$$x=vt+x_0 \xrightarrow[x=-3]{t=9} -3=-3\times 9+x_0 \rightarrow x_0=24\,m$$

$$\text{معادلهٔ حرکت } x=vt+x_0 \rightarrow x=-3t+24$$

فاصله ۱۵ متری مبدأ در دو حالت امکان‌پذیر است:

$$1)\ x=+15 \rightarrow 15=-3t+24 \rightarrow t=3\,s$$

$$2)\ x=-15 \rightarrow -15=-3t+24 \rightarrow t=13\,s$$

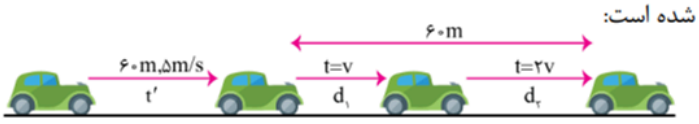
که فقط $t=13\,s$ در گزینه‌ها وجود دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۰ با توجه به سؤال نیمی از مسیر یعنی ۶۰ متر را با تندی $۵\frac{m}{s}$ طی کردیم و نیمهٔ دیگر آن که همان ۶۰ متر می‌شود در دو بازهٔ زمانی یکسان t ثانیه‌ای طی شده است:

$$\Delta x = vt \begin{cases} d_۱ = vt \\ d_۲ = ۲vt \end{cases} \rightarrow d_۱ + d_۲ = ۶۰ \rightarrow ۳vt = ۶۰ \rightarrow t = \frac{۶۰}{۳v} = \frac{۲۰}{v}$$



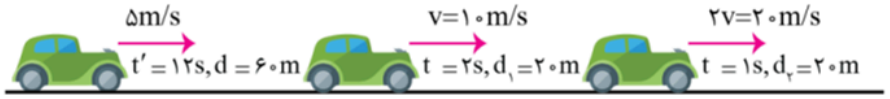
سرعت متوسط در کل مسیر $۷/۵\frac{m}{s}$ است:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}} \rightarrow ۷/۵ = \frac{d + d_۱ + d_۲}{t' + t + t} \xrightarrow[t=\frac{۲۰}{v}\,,\ d+d_۱+d_۲=۱۲۰]{t'=\frac{۶۰}{۵}=۱۲s} ۷/۵ = \frac{۱۲۰}{۱۲ + \frac{۲۰}{v} + \frac{۲۰}{v}}$$

با حل معادلهٔ بالا v بدست می‌آید:

$$۷/۵ = \frac{۱۲۰}{۱۲ + \frac{۴۰}{v}} \xrightarrow{\text{طرفین‌وسطین}} ۹۰ + \frac{۳۰۰}{v} = ۱۲۰ \rightarrow \frac{۳۰۰}{v} = ۳۰ \rightarrow v = ۱۰\frac{m}{s}$$

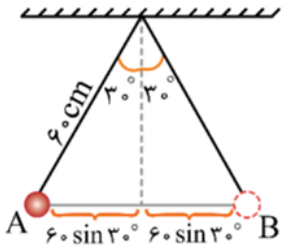
زمان t با توجه به معادلهٔ $t = \frac{۲۰}{v} = \frac{۲۰}{۱۰} = ۲s$ است. در مدت ۱۵s نخست $t' = ۱۲s$ با سرعت $۵\frac{m}{s}$ و سپس از ۱۲s تا ۱۴s به مدت ۲s با سرعت $v = ۱۰\frac{m}{s}$ و به مدت ۱s از $t = ۱۴s$ تا $t = ۱۵s$ با سرعت $۲v = ۲۰\frac{m}{s}$ طی شده است:



$$v_{av} = \frac{\Delta x_{کل}}{\Delta t_{کل}} = \frac{۶۰ + ۲۰ + ۲۰}{۱۲ + ۲ + ۱} = \frac{۱۰۰}{۱۵} = \frac{۲۰}{۳}\frac{m}{s}$$

(مازِ ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱ طول خط واصل A به B برابر اندازه جابه‌جایی است.



$$\text{اندازهٔ جابه‌جایی} = ۲ \times ۶۰ \sin ۳۰^\circ = ۶۰cm \quad (\sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲})$$

طول مسیر واقعی، یعنی $\frac{۱}{۶}$ محیط دایره برابر مسافت طی شده است.

$$\text{مسافت طی شده} : \ell = \frac{۱}{۶} \times ۲\pi R \simeq \frac{۱}{۶} \times ۲ \times ۳/۱۴ \times ۶۰ = ۶۲/۸cm$$

بنابراین اختلاف مسافت طی شده و اندازهٔ جابه‌جایی برابر ۲/۸cm است.

(مازِ ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۲ در ۲ ثانیهٔ اول، شیب نمودار مثبت است و متحرک در حال حرکت در جهت محور x می‌باشد. در این بازه، متحرک مسافت ۳ متری را طی کرده است و تندی متوسط آن برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵ \frac{m}{s}$$

در بازهٔ زمانی $۴s < t < ۶s$، $x < ۰$ است، یعنی بردار مکان در خلاف جهت محور x است. در این بازه، اندازهٔ سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۴ - ۰}{۲} = -۲ \frac{m}{s} \rightarrow |v_{av}| = ۲ \frac{m}{s}$$

بنابراین تندی متوسط در ۲ ثانیهٔ اول، $۰/۵ \frac{m}{s}$ کمتر از بزرگی سرعت متوسط در بازهٔ $۴s < t < ۶s$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳ جابه‌جایی در ۵ ثانیه‌های اول و دوم برابر است با:

$$\text{۵ ثانیهٔ اول} : \Delta x_۱ = v_{av_۱} \Delta t_۱ = ۴ \times ۵ = ۲۰ m$$

$$\text{۵ ثانیهٔ دوم} : \Delta x_۲ = v_{av_۲} \Delta t_۲ = -۳ \times ۵ = -۱۵ m$$

از طرفی جابه‌جایی در کل مدت ۲۰ ثانیه برابر است با:

$$\text{۲۰ ثانیهٔ اول} : \Delta x_{کل} = v_{av_{کل}} \Delta t_{کل} = -۲ \times ۲۰ = -۴۰ m$$

جابه‌جایی کل برابر مجموع جابه‌جایی در ۳ مرحله است، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Delta x_{کل} = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ + \Delta x_۳ \rightarrow -۴۰ = ۲۰ - ۱۵ + \Delta x_۳ \rightarrow \Delta x_۳ = -۴۵ m$$

بنابراین سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ دوم حرکت (مرحلهٔ سوم) برابر است با:

$$v_{av_۲} = \frac{\Delta x_۳}{\Delta t_۳} = \frac{-۴۵}{۱۰} = -۴/۵ \frac{m}{s} \rightarrow \vec{v}_{av_۲} = -۴/۵ \vec{i}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴ **بررسی موارد:**

الف) فاصلهٔ دو متحرک در ۱۸ ثانیهٔ اول در حال افزایش و در ۹ ثانیهٔ بعدی در حال کاهش است. (✗)

ب) در لحظهٔ $t = ۱۸s$، فاصلهٔ دو متحرک بیشینه می‌شود و این فاصله برابر $۱۸m = (-۸) - ۱۰$ است. (✓)

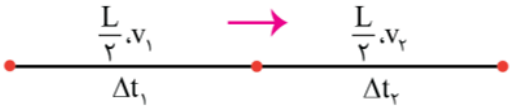
ج) متحرک B در ۱۸ ثانیهٔ اول در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. در این مدت، متحرک A مسافت ۱۰m را طی می‌کند و تندی متوسط آن برابر $\frac{۱۰}{۱۸} = \frac{۵}{۹} \frac{m}{s}$ است. (✗)

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۵ فرض کنیم طول استخر برابر L باشد، در مسیر رفت با توجه به شکل زیر داریم:

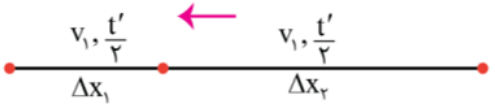
$$\begin{cases}\Delta t_1 = \dfrac{\frac{L}{2}}{v_1} = \dfrac{L}{2v_1} \\ \Delta t_2 = \dfrac{\frac{L}{2}}{v_2} = \dfrac{L}{2v_2}\end{cases}$$



زمان رفت : $t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \dfrac{L(v_1+v_2)}{2v_1v_2}$

در مسیر برگشت هم داریم:

$$\begin{cases}\Delta x_1 = v_1\dfrac{t'}{2} \\ \Delta x_2 = v_2\dfrac{t'}{2}\end{cases} \rightarrow L = v_1\frac{t'}{2} + v_2\frac{t'}{2} = \frac{t'}{2}(v_1+v_2)$$



زمان برگشت : $t' = \dfrac{2L}{v_1+v_2}$

برای مقایسه زمان رفت و برگشت، نسبت $\dfrac{t'}{t}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{t'}{t} = \frac{\frac{2L}{v_1+v_2}}{\frac{L(v_1+v_2)}{2v_1v_2}} = \frac{4v_1v_2}{(v_1+v_2)^2}$$

در ادامه ثابت می‌کنیم عبارت فوق کمتر یا مساوی ۱ است.

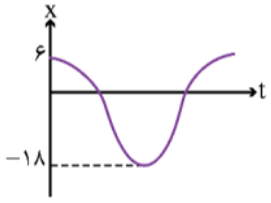
$$(v_1-v_2)^2 \geq 0 \Rightarrow v_1^2 - 2v_1v_2 + v_2^2 \geq 0 \Rightarrow v_1^2 + 2v_1v_2 + v_2^2 - 4v_1v_2 \geq 0 \Rightarrow (v_1+v_2)^2 \geq 4v_1v_2$$

$$\Rightarrow \frac{4v_1v_2}{(v_1+v_2)^2} \leq 1 \Rightarrow \frac{t'}{t} \leq 1$$

در نتیجه $\dfrac{t'}{t} \leq 1$ است، بنابراین $t \geq t'$ می‌باشد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۶



نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم.

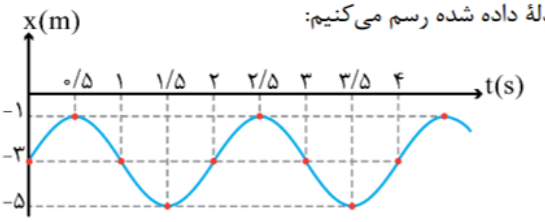
$$x = 12\cos(t) - 6$$

مطابق نمودار، بیشترین فاصلهٔ متحرک تا مبدأ مکان برابر ۱۸m است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۷ ابتدا نمودار مکان - زمان را با کمک معادلهٔ داده شده رسم می‌کنیم:



بررسی موارد:

الف: با توجه به نمودار مکان-زمان متحرک، همواره $x<0$ است، یعنی بردار مکان متحرک همواره در خلاف جهت محور x است. (✓)

ب: مکان متحرک در لحظات $t=0$ و $t=1s$ یکسان است، بنابراین جابه‌جایی متحرک در ثانیهٔ اول حرکت صفر است؛ در نتیجه سرعت متوسط هم صفر می‌باشد. (✓)

ج: در ۴ ثانیهٔ اول، در لحظات $t=0/5s, 1/5s, 2/5s, 3/5s$، علامت شیب نمودار تغییر کرده، بنابراین ۴ بار جهت حرکت متحرک عوض شده است. (✓)

د: در بازهٔ زمانی $1s<t<1/5s$، اندازهٔ شیب نمودار به تدریج کاهش می‌یابد تا در لحظهٔ $t=1/5s$، به صفر می‌رسد، پس در این بازه، تندی متحرک در حال کاهش است. (✓)

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

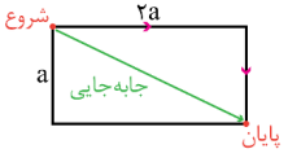
۱۸



اگر متحرک به گونه‌ای حرکت کند که ابتدای حرکت آن وسط طول بالایی مستطیل و انتهای حرکت آن وسط طول پایینی مستطیل باشد، جابه‌جایی کمینه است.

کمترین اندازهٔ جابه‌جایی : $d_{min}=a$

اگر متحرک به گونه‌ای حرکت کند که ابتدا و انتهای حرکت آن، دو سر قطر مستطیل باشد، جابه‌جایی بیشینه است.



بیشترین اندازهٔ جابه‌جایی : $d_{max}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=a\sqrt{5}$

$$\rightarrow \frac{d_{max}}{d_{min}}=\frac{a\sqrt{5}}{a}=\sqrt{5}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

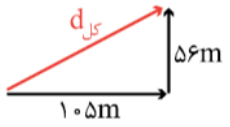
۱۹ گام اول: جابه‌جایی در ۱۵ ثانیه اول برابر است با:

$$\vec{d}_1=\vec{v}_{av_1}\Delta t_1=7\vec{i}\times 15=105\vec{i}\,(m)$$

گام دوم: جابه‌جایی در ۷ ثانیهٔ بعدی(۱۵s تا ۲۲s) برابر است با:

$$\vec{d}_2=\vec{v}_{av_2}\Delta t_2=8\vec{j}\times 7=56\vec{j}\,(m)$$

گام سوم: مسیر حرکت متحرک مطابق شکل زیر است:



$$d_{کل}=\sqrt{105^2+56^2}=119m \Rightarrow v_{av}=\frac{d_{کل}}{\Delta t}=\frac{119}{22}\,m/s$$

دقت کنید که $8\times 7=56$ و $15\times 7=105$ است، پس با توجه به اعداد فیثاغورسی (۱۷ و ۱۵ و ۸)، حاصل عبارت فوق به راحتی برابر $17\times 7=119m$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۰ فرض کنیم مکان اولیهٔ متحرک برابر x_0 باشد، بنابراین جابه‌جایی و سرعت متوسط آن در ۶ ثانیهٔ اول برابر است با:

$$\Delta x = x_6 - x_0 = 10 - x_0 \rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{10 - x_0}{6}$$

طبق فرض سؤال، سرعت متوسط در ۶ ثانیهٔ اول با سرعت در لحظهٔ $t = 2s$ (شیب خط مماس بر نمودار در $t = 2s$) برابر است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} v_{av} = \frac{10 - x_0}{6} \\ \text{شیب مماس} = \frac{8}{2} = 4\frac{m}{s} \end{cases} \rightarrow \frac{10 - x_0}{6} = 4 \rightarrow x_0 = -14m$$

پس در ۱۰ ثانیهٔ اول، متحرک ابتدا ۲۴m در جهت محور x حرکت می‌کند و سپس ۱۰m باز می‌گردد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\ell = 24 + 10 = 34m \rightarrow s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{34}{10} = 3/4\frac{m}{s}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱ **بررسی موارد:**

الف: سرعت در لحظهٔ $t = 0$ برابر $v_0 = 5\frac{m}{s}$ و در لحظهٔ $t = 19s$، برابر $v_{19} = 6\frac{m}{s}$ است، بنابراین تغییرات سرعت مثبت است و در نتیجه شتاب متوسط هم در این بازه مثبت می‌باشد، یعنی بردار آن در جهت محور x است. (✓)

ب: در بازهٔ زمانی $5s < t < 6s$، نمودار در حال دور شدن از محور افقی است، یعنی اندازهٔ سرعت یا همان تندی در حال افزایش است. (✗)

ج: برای محاسبهٔ شتاب متوسط در ۸ ثانیهٔ اول می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t = 0: v_0 = 5\frac{m}{s} \\ t = 8s: v_8 = -5\frac{m}{s} \end{cases} \rightarrow \Delta v = -5 - 5 = -10\frac{m}{s}$$

$$\rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-10}{8} = -1/25\frac{m}{s}$$

بنابراین بزرگی شتاب متوسط در این بازه برابر $1/25\frac{m}{s^2}$ است. (✗)

د: در لحظاتی که نمودار v-t، محور افقی را قطع کند و علامت سرعت عوض شود، جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند، بنابراین در لحظات $t = 4s$، $t = 13s$ و $t = 22s$، جهت حرکت عوض شده است. (✗)

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۲

گام اول:

اگر دو متحرک، هر یک با تندی $۱۰\frac{m}{s}$ به سمت هم حرکت کنند، مجموع مسافت طی شده توسط آن‌ها تا زمان رسیدن به هم برابر فاصلهٔ اولیهٔ آن‌هاست، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}\ell_A = v_A t = ۱۰\times ۲۰ = ۲۰۰\,m\\ \ell_B = v_B t = ۱۰\times ۲۰ = ۲۰۰\,m\end{cases} \rightarrow \text{فاصلهٔ اولیه}: L = \ell_A + \ell_B = ۴۰۰\,m$$

بنابراین می‌توانیم مکان اولیهٔ متحرک B را برابر $x_{۰B} = ۰$ و مکان اولیهٔ متحرک A را برابر $x_{۰A} = ۴۰۰\,m$ در نظر بگیریم.

گام دوم:

حال اگر متحرک A با سرعت $(۶\frac{m}{s})\vec{i}$ و متحرک B با سرعت $(۱۱\frac{m}{s})\vec{i}$ حرکت کنند، معادلهٔ مکان - زمان آن‌ها برابر می‌شود با:

$$x = vt + x_{۰} \rightarrow \begin{cases}x_A = ۶t + ۴۰۰\\ x_B = ۱۱t\end{cases}$$

گام سوم:

فاصلهٔ دو متحرک برابر است با:

$$\text{فاصله}: d = |x_B - x_A| \rightarrow d = |۱۱t - (۶t + ۴۰۰)|$$

$$\rightarrow d = |۵t - ۴۰۰| \xrightarrow{d=۱۵۰\,m} ۵t - ۴۰۰ = \pm ۱۵۰ \rightarrow \begin{cases}t = ۵۰\,s\\ t = ۱۱۰\,s\end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳

گام اول:

معادلهٔ مکان - زمان متحرک A برابر است با:

$$\begin{cases}v_A = \text{شیب نمودار} = \frac{۳۰}{۱۰} = ۳\frac{m}{s}\\ x_{۰A} = \text{عرض از مبدأ نمودار} = -۳۰\,m\end{cases} \xrightarrow{x=vt+x_{۰}} x_A = ۳t - ۳۰$$

گام دوم:

با توجه به نمودار و متن سؤال، دو متحرک در مکان $x = -۹\,m$ از کنار هم گذشته‌اند. زمانی که متحرک A به این مکان می‌رسد برابر است با:

$$x_A = ۳t - ۳۰ \rightarrow -۹ = ۳t - ۳۰ \rightarrow t = ۷\,s$$

گام سوم:

متحرک B در لحظهٔ $t = ۶\,s$ در مکان $x = ۰$ و در لحظهٔ $t = ۷\,s$، در مکان $x = -۹\,m$ قرار دارد، بنابراین سرعت آن برابر است با:

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۹ - ۰}{۷ - ۶} = -۹\frac{m}{s}$$

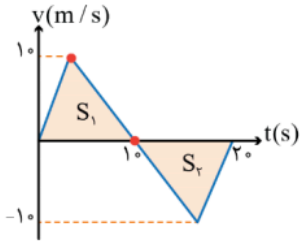
گام چهارم:

سرعت A برابر $v_A = +۳\frac{m}{s}$ و سرعت B برابر $v_B = -۹\frac{m}{s}$ است، پس در هر ثانیه، فاصلهٔ دو متحرک ۱۲m تغییر می‌کند. با توجه به این‌که فاصله در لحظهٔ $t = ۷\,s$ برابر صفر است، می‌توان فهمید که فاصله در لحظات $t = ۶\,s$ (پایان ثانیهٔ ششم) و $t = ۸\,s$ (پایان ثانیهٔ هشتم) برابر ۱۲m می‌شود.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud

۲۴ **بررسی موارد:**



الف: جابه‌جایی و سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ دوم برابر است با:

$$\text{۱۰ ثانیهٔ دوم}: \Delta x = -|S_۲| = -\frac{۱۰\times۱۰}{۲} = -۵۰\,m$$

$$\rightarrow v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۵۰}{۱۰} = -۵\,\frac{m}{s}$$

ب: مسافت طی شده در ۲۰ ثانیهٔ اول برابر است با:

$$\text{۲۰ ثانیهٔ اول}: \ell = |S_۱| + |S_۲| = ۵۰ + ۵۰ = ۱۰۰\,m$$

ج: در ۱۰ ثانیهٔ اول، متحرک به اندازهٔ $|S_۱| = ۵۰\,m$ در جهت محور x حرکت می‌کند و چون مکان اولیهٔ آن همان مبدأ محور x بوده است، فاصلهٔ آن تا مبدأ در لحظهٔ $t = ۱۰\,s$ برابر $۵۰\,m$ خواهد بود.

د: متحرک ابتدا به اندازهٔ $|S_۱| = ۵۰\,m$ در جهت محور x حرکت می‌کند و سپس به اندازهٔ $|S_۲| = ۵۰\,m$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. مسیر حرکت متحرک مطابق شکل زیر است.



همان‌طور که می‌بینید، بردار مکان متحرک هیچ‌گاه در خلاف جهت محور x نیست، در حالی که بردار سرعت در بازهٔ $۱۰\,s < t < ۲۰\,s$ در خلاف جهت محور x است! بنابراین بردارهای مکان و سرعت در این بازهٔ زمانی هم‌جهت نیستند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

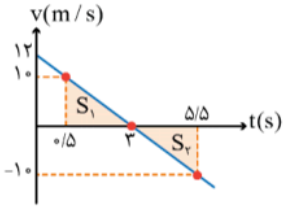
۲۵ با مقایسهٔ معادلهٔ مکان - زمان داده شده با معادلهٔ مکان - زمان حرکت با شتاب ثابت، می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x = -۲t^۲ + ۱۲t + ۱۷ \\ x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -۴\,\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = ۱۲\,\frac{m}{s} \\ x_۰ = ۱۷\,m \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ سرعت - زمان متحرک برابر است با:

$$v = at + v_۰ \rightarrow v = -۴t + ۱۲$$

سرعت در لحظهٔ $t = ۳\,s$ برابر صفر است و چون حرکت با شتاب ثابت حول لحظهٔ صفر شدن سرعت (رأس نمودار مکان - زمان) متقارن است، می‌توان نتیجه گرفت که اگر در یک بازهٔ زمانی، سرعت متوسط صفر باشد، لحظهٔ صفر شدن سرعت، یعنی لحظهٔ $t = ۳\,s$ وسط آن بازه قرار دارد که از سر و ته بازه $\frac{۵}{۲} = ۲/۵\,s$ فاصله دارد، بنابراین بازهٔ زمانی موردنظر، بازهٔ زمانی $۰/۵\,s < t < ۵/۵\,s$ است. مسافت طی شده و تندی متوسط در این بازهٔ زمانی برابر است با:



$$v = -۴t + ۱۲$$

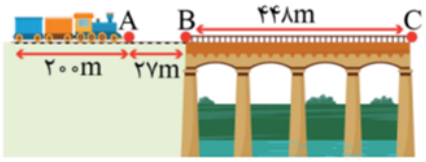
$$\ell = |S_۱| + |S_۲| = \frac{۱۰\times۲/۵}{۲} + \frac{۱۰\times۲/۵}{۲} = ۲۵\,m$$

$$\rightarrow s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۲۵}{۵} = ۵\,\frac{m}{s}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۶ در ۳ ثانیهٔ اول، ابتدای قطار از نقطهٔ A به B می‌رسد. در این بازه می‌توان نوشت:



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + \overset{\text{صفر}}{\cancel{v_0}}t \rightarrow 27 = \frac{1}{2}a \times 3^2 \rightarrow a = 6\frac{m}{s^2}$$

برای آن‌که قطار به طور کامل از روی پل عبور کند، باید انتهای آن به نقطهٔ C برسد، یعنی از ابتدای حرکت، قطار باید مسافتی به اندازهٔ $200+27+448=675m$ را طی کند. برای محاسبهٔ زمان رسیدن به مقصد می‌توان نوشت:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + \overset{\text{صفر}}{\cancel{v_0}}t \rightarrow 675 = \frac{1}{2} \times 6 \times t_2^2 \rightarrow t_2 = 15s$$

بنابراین سرعت متحرک در این لحظه برابر می‌شود با:

$$v = at + \overset{\text{صفر}}{\cancel{v_0}} \rightarrow v = 6t \xrightarrow{t=15s} v_2 = 6 \times 15 = 90\frac{m}{s}$$

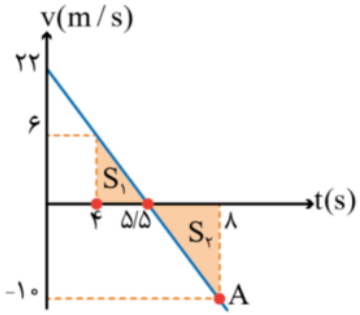
دقت کنید که با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان هم می‌توانستیم تندی نهایی را محاسبه کنیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \rightarrow v_2^2 - 0 = 2 \times 6 \times 675 \rightarrow v_2^2 = 8100 \rightarrow v_2 = 90\frac{m}{s}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۷ در ۴ ثانیهٔ اول که سرعت متحرک A بیشتر از B است، متحرک A جلو می‌افتد. سپس در ۴ ثانیهٔ بعدی، سرعت B بیشتر از A است و متحرک B عقب‌افتادگی خود را جبران می‌کند و دو متحرک در لحظهٔ $t = ۸s$ دوباره به هم می‌رسند، بنابراین می‌توان گفت فاصلهٔ دو متحرک در بازهٔ $۰ < t < ۴s$ افزایش می‌یابد، در بازهٔ $۴s < t < ۸s$ کاهش می‌یابد و در $t > ۸s$ دوباره افزایش می‌یابد و در نتیجه بازهٔ موردنظر سؤال، بازهٔ $۴s < t < ۸s$ است. در این بازهٔ زمانی، تندی متوسط هر دو متحرک را بدست می‌آوریم. برای این کار باید معادلهٔ سرعت - زمان آن‌ها را داشته باشیم تا با استفاده از نمودار سرعت - زمان مسافت و تندی متوسط محاسبه شود.



$$v_A = a_A t + v_{۰_A} \rightarrow \begin{cases} t = ۵/۵s : ۰ = a_A \times ۵/۵ + v_{۰_A} & \text{رابطهٔ (۱)} \\ t = ۴s : ۶ = a_A \times ۴ + v_{۰_A} & \text{رابطهٔ (۲)} \end{cases}$$

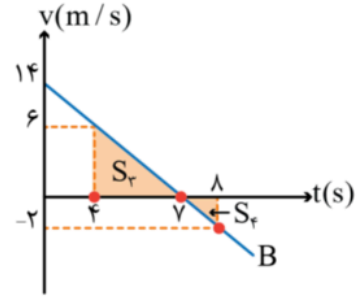
$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۲) − رابطهٔ (۱)}} ۰ - ۶ = ۱/۵a_A \rightarrow a_A = -۴\frac{m}{s^۲}$$

$$\rightarrow v_{۰_A} = ۲۲\frac{m}{s}$$

$$\rightarrow v_A = -۴t + ۲۲$$

$$\ell_A = |S_۱| + |S_۲| = \frac{۱/۵ \times ۶}{۲} + \frac{۲/۵ \times ۱۰}{۲} = ۱۷m$$

$$\rightarrow s_{av_A} = \frac{\ell_A}{\Delta t} = \frac{۱۷}{۴}\frac{m}{s}$$



$$v_B = a_B t + v_{۰_B} \rightarrow \begin{cases} t = ۷s : ۰ = a_B \times ۷ + v_{۰_B} & \text{رابطهٔ (۳)} \\ t = ۴s : ۶ = a_B \times ۴ + v_{۰_B} & \text{رابطهٔ (۴)} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۴) − رابطهٔ (۳)}} ۰ - ۶ = ۳a_B \rightarrow a = -۲\frac{m}{s^۲}$$

$$\rightarrow v_{۰} = ۱۴\frac{m}{s}$$

$$\rightarrow v_B = -۲t + ۱۴$$

$$\ell_B = |S_۳| + |S_۴| = \frac{۳ \times ۶}{۲} + \frac{۱ \times ۲}{۲} = ۱۰m$$

$$\rightarrow s_{av_B} = \frac{\ell_B}{\Delta t} = \frac{۱۰}{۴}\frac{m}{s}$$

بنابراین تندی متوسط A به اندازهٔ $\frac{۷}{۴}\frac{m}{s}$ بیشتر از B است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۸ در بازهٔ زمانی $۲s < t < ۵s$، جابه‌جایی متحرک برابر $\Delta x = -۱۲m$ است و می‌توان نوشت:

$$\Delta x = \frac{v_۲ + v_۵}{۲}\Delta t \rightarrow -۱۲ = \frac{۰ + v_۵}{۲} \times ۳ \rightarrow v_۵ = -۸\frac{m}{s}$$

بنابراین شتاب متحرک برابر است با:

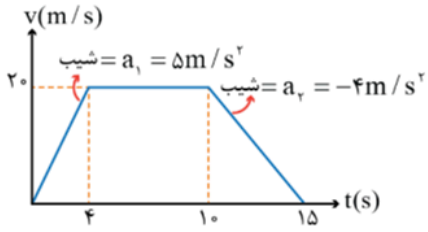
$$a = \frac{v_۵ - v_۲}{\Delta t} = \frac{-۸ - ۰}{۳} = \frac{-۸}{۳}\frac{m}{s^۲}$$

دقت کنید که آهنگ تغییرات سرعت همان شتاب است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۹



با توجه به توضیحات سؤال و با توجه به این‌که شیب نمودار سرعت - زمان برابر شتاب است، نمودار سرعت - زمان این حرکت سه مرحله‌ای را رسم می‌کنیم.

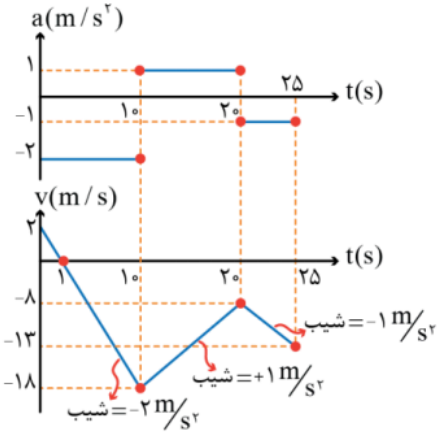
جابه‌جایی متحرک برابر مساحت زیر نمودار است.

$$\Delta x = S = \frac{۶+۱۵}{۲} \times ۲۰ = ۲۱۰\,m$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰

ابتدا نمودار سرعت - زمان را با کمک نمودار شتاب - زمان رسم می‌کنیم. کافی است دقت کنیم که شیب نمودار سرعت - زمان باید برابر شتاب باشد.



دقت کنید که نمودار باید به گونه‌ای رسم شود که در لحظهٔ $t = ۲۰s$ که دومین باری است که جهت شتاب عوض می‌شود، سرعت برابر $-۸\frac{m}{s}$ باشد.

مطابق نمودار سرعت - زمان رسم شده، متحرک ابتدا کمی در جهت محور x حرکت می‌کند و سپس در لحظهٔ $t = ۱s$ به بعد، در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و مسیر حرکت آن مطابق شکل زیر است، بنابراین بیشترین فاصلهٔ متحرک تا مبدأ مکان در پایان حرکت، یعنی لحظهٔ $t = ۲۵s$ بدست می‌آید.



حال با استفاده از مساحت زیر نمودار سرعت - زمان، مکان آن را در لحظهٔ $t = ۲۵s$ بدست می‌آوریم.

$$\Delta x = (\frac{۱\times۲}{۲}) - (\frac{۹\times۱۸}{۲}) - (\frac{۱۸+۸}{۲})\times۱۰ - (\frac{۸+۱۳}{۲}\times۵)$$

$$\rightarrow \Delta x = ۱ - ۸۱ - ۱۳۰ - ۵۲/۵ = -۲۶۲/۵\,m$$

بنابراین بیشترین فاصلهٔ متحرک تا مبدأ مکان برابر $۲۶۲/۵m$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۱

حرکت هر متحرک را جداگانه بررسی می‌کنیم.

متحرک A: اندازهٔ شیب نمودار مکان ـ زمان A همواره در حال افزایش است، بنابراین تندی آن همواره در حال افزایش است و حرکت تندشونده است. (✓)

متحرک B: شیب نمودار مکان ـ زمان B منفی است، ولی اندازهٔ شیب همواره در حال افزایش است، بنابراین حرکت این متحرک هم همواره تندشونده است. (✓)

متحرک C: نمودار سرعت ـ زمان C همواره از محور افقی دور می‌شود، یعنی حرکت همواره تندشونده است. (✓)

متحرک D: حرکت D ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است. (✗)

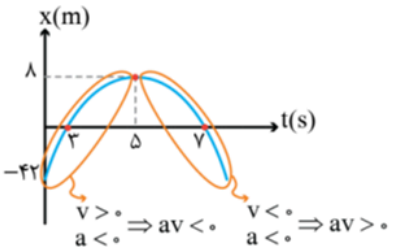
متحرک‌های E و F: با استفاده از نمودار شتاب - زمان فقط می‌توان راجع به تغییرات سرعت اظهارنظر کرد و نمی‌توان راجع به خود سرعت اظهارنظر قطعی کرد، بنابراین نمی‌توانیم راجع به نوع حرکت متحرک‌های E و F اظهارنظر کنیم. (✗)

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۲ ابتدا نمودار مکان - زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

$$\begin{cases} t=0 \rightarrow x_0 = -42m \\ x=0 \rightarrow -2t^2+20t-42=0 \rightarrow \begin{cases} t_1=3s \\ t_2=7s \end{cases} \\ t_{رأس}=\dfrac{-b}{2a}=5s \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}} x=8m \end{cases}$$



طبق صورت سؤال، در بازه‌ای که بردارهای مکان و سرعت در خلاف جهت هم هستند، متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است که طبق نمودار یکی از بازه‌های $t_1=0s$ تا $t_2=3s$ یا $t_1=5s$ تا $t_2=7s$ است.

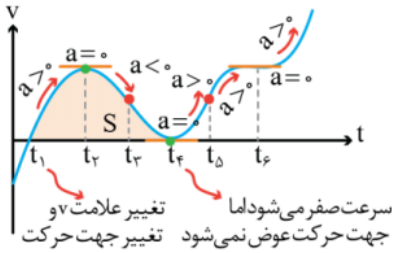
هم‌چنین در بازه‌ای که تندی در حال افزایش است باید $av>0$ باشد که طبق اطلاعات روی شکل، بازهٔ $(5,+\infty)$ این شرط را دارد.

اشتراک این دو بازه، بازهٔ $(5s,7s)$ است و اکنون سرعت متوسط در این بازه را می‌یابیم:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\vec{x}_2-\vec{x}_1}{t_2-t_1} \xrightarrow[t_1=5\,,\,t_2=7]{\vec{x}_1=8\vec{i}\,,\,\vec{x}_2=0} \vec{v}_{av}=\frac{0-8\vec{i}}{2}=-(4\frac{m}{s})\vec{i}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳ مطابق نمودار مقابل، جهت حرکت متحرک فقط یک بار، آن هم در لحظهٔ t_1 عوض خواهد شد. هم‌چنین جهت بردار شتاب (علامت a) در دو لحظهٔ t_2 و t_4 عوض خواهد شد که دومین بار آن در لحظهٔ t_4 رخ خواهد داد. پس بازهٔ مدنظر سؤال، بازهٔ (t_1,t_4) است. اکنون به بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم:



گزینه ۱ ← در این بازه کلاً $v<0$ و حرکت متحرک پیوسته در جهت محور است ← نادرست

گزینه ۲ ← سرعت در لحظات t_1 و t_4 باهم برابر است، بنابراین شتاب متوسط در این بازه صفر است و در جهت محور نیست ← نادرست

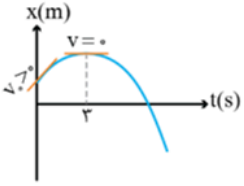
گزینه ۳ ← مساحت S (روی شکل)، سطح زیر نمودار در این بازه است که معادل جابه‌جایی می‌باشد. چون این مساحت بالای محور افقی قرار دارد پس $\Delta x>0$ و چون جهت بردار سرعت متوسط با بردار جابه‌جایی یکی است پس بردار سرعت متوسط این متحرک در این بازه، در جهت محور است ← درست

گزینه ۴ ← از این نمودار بدون داشتن مکان در یک لحظه نمی‌توانیم عدد یا علامت مکان در لحظه‌های دیگر را بیابیم و از آنجا که برای بررسی دور یا نزدیک شدن به مبدأ مختصات به علامت عبارت xv نیاز داریم داده‌های سؤال برای بررسی این موضوع کافی نیست و این گزینه الزاماً درست نمی‌باشد ← نادرست

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

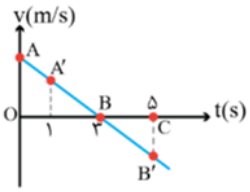
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۴



ابتدا تلاش می‌کنیم به کمک نمودار $x-t$، نمودار $v-t$ این حرکت را رسم کنیم.

طبق موارد نوشته شده روی نمودار $x-t$، $x>0$، $v>0$ و در لحظهٔ $t=3$، $v=0$ می‌باشد. پس نمودار سرعت - زمان این حرکت مانند شکل زیر است. از طرفی اگر قرار باشد تندی متوسط در یک بازهٔ ۴ ثانیه‌ای کمینه باشد، ۲ ثانیهٔ ابتدایی این بازه باید قبل از لحظهٔ توقف و ۲ ثانیهٔ آخر این بازه باید بعد از توقف باشد تا لحظهٔ $t=3s$ درست وسط این بازه قرار گیرد. پس بازهٔ موردنظر $t_1=1s$ تا $t_2=5s$ می‌باشد. هم‌چنین براساس داده‌های صورت سؤال می‌توان نوشت:



$$s_{av[0,3]}=\frac{\ell}{\Delta t}\rightarrow 6=\frac{\ell}{3}\rightarrow \ell=18m$$

و چون در این بازه تغییر جهت نداریم:

$$\Delta x=\ell=18m$$

$$\rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAB}}=18$$

با نوشتن تشابه مثلث‌ها بین دو مثلث $\overset{\Delta}{OAB}$ و $\overset{\Delta}{BB'C}$ داریم:

$$\frac{S_{BB'C}}{S_{OAB}}=\left(\frac{BC}{BO}\right)^2$$

$$\rightarrow \frac{S_{BB'C}}{18}=(\frac{2}{3})^2\rightarrow S_{BB'C}=8\rightarrow \ell_{[3,5]}=8m$$

از طرفی به دلیل تقارن در حرکت با شتاب ثابت، چنین می‌توان نوشت:

$$\ell_{[1,3]}=\ell_{[3,5]}=8m$$

$$\rightarrow \ell_{[1,5]}=8+8=16m\rightarrow s_{av[1,5]}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{16}{4}=4\frac{m}{s}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۵

گام اول:

به‌دست آوردن معادلهٔ مکان ـ زمان هر دو متحرک A و B:

۲ ثانیهٔ سوم حرکت، یعنی بازهٔ زمانی $t_1 = 4s$ تا $t_2 = 6s$ پس ابتدای ۲ ثانیهٔ سوم پس از شروع حرکت، یعنی لحظهٔ $t_1 = 4s$، در نتیجه متحرک A در لحظهٔ $t = 4s$ از مکان $x = +10m$ می‌گذرد. با جایگذاری در معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده داریم:

$$x = vt - 70 \xrightarrow[t=4s]{x=+10m} 10 = 4v - 70 \rightarrow 80 = 4v \rightarrow v = 20\frac{m}{s}$$

با توجه به اینکه فرم کلی معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت به صورت $x = vt + x_0$ است، پس از مقایسهٔ این فرم کلی با معادلهٔ مکان ـ زمان داده‌شده در صورت سؤال نتیجه می‌گیریم که سرعت متحرک A، $20\frac{m}{s}$ و سرعت متحرک B، $30\frac{m}{s}$ است.

در نهایت معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک A و B به‌صورت زیر است:

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک A : $x_A = 20t - 70$

معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک B : $x_B = 30t - 120$

گام دوم:

به‌دست آوردن لحظهٔ رسیدن دو متحرک به یکدیگر:

برای به‌دست آوردن لحظهٔ رسیدن دو متحرک به یکدیگر، مکان دو متحرک در معادلهٔ مکان ـ زمان را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_A = 20t - 70 \\ x_B = 30t - 120 \end{cases} \rightarrow x_A = x_B \rightarrow 20t - 70 = 30t - 120 \rightarrow 10t - 50 = 0 \rightarrow t = 5s$$

گام سوم:

به‌دست آوردن لحظه‌ای که برای دومین بار فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر برابر ۴۰ متر می‌شود:

$$|x_B - x_A| = 40 \rightarrow |30t - 120 - (20t - 70)| = 40 \rightarrow |10t - 50| = 40 \rightarrow \begin{cases} 10t - 50 = 40 \rightarrow t_2 = 9s \\ 10t - 50 = -40 \rightarrow t_1 = 1s \end{cases}$$

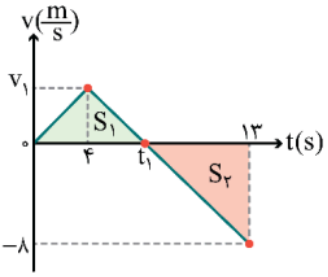
پس در دو لحظهٔ $t_1 = 1s$ و $t_2 = 9s$ فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر برابر ۴۰ متر می‌شود و چون ما لحظه‌ای که پس از رسیدن دو متحرک به یکدیگر است را، می‌خواهیم، پس $t = 9s$ مدنظر است، بنابراین ۴ ثانیه پس از به هم رسیدن دو متحرک، فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر برای دومین بار $40m$ می‌شود.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۶

گام اول:



با توجه به شتاب متوسط در ۴ ثانیهٔ اول، سرعت v_1 را روی نمودار به‌دست می‌آوریم.

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\rightarrow ۲/۵=\frac{v_۱-۰}{۴}\rightarrow v_۱=۱۰\frac{m}{s}$$

گام دوم:

با توجه به تشابه مثلث‌ها، لحظهٔ t_1 را به‌دست می‌آوریم.

می‌دانیم مجموع قدر مطلق مساحت‌های محصور بین نمودار v.t و محور برابر با مسافت طی‌شده توسط متحرک در آن بازهٔ زمانی است، بنابراین:

$$\frac{۱۳-t_۱}{t_۱-۴}=\frac{۸}{v_۱}\xrightarrow{v_۱=۱۰\frac{m}{s}}۱۳۰-۱۰t_۱=۸t_۱-۳۲\rightarrow ۱۸t_۱=۱۶۲\rightarrow t_۱=۹s$$

گام سوم:

مسافت طی‌شده در مدت زمان ۱۳s برابر است با:

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|\rightarrow \ell=\frac{۱۰\times ۹}{۲}+\frac{۴\times ۸}{۲}=۶۱m$$

گام چهارم:

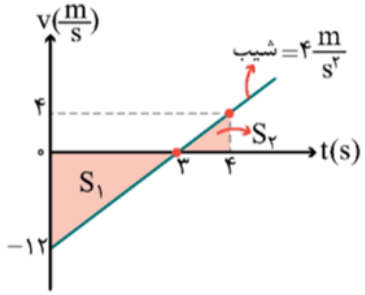
تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۶۱}{۱۳}\frac{m}{s}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷

گام اول:



نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم.

$$\begin{cases}x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\\ x=۲t^۲-۱۲t+۱۸\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=۴\frac{m}{s^۲}\\ v_۰=-۱۲\frac{m}{s}\end{cases}\rightarrow v=۴t-۱۲$$

گام دوم:

مسافت طی‌شده برابر است با:

$$\ell=|S_۱|+|S_۲|\rightarrow \ell=\frac{۳\times ۱۲}{۲}+\frac{۱\times ۴}{۲}=۲۰m$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۸

گام اول:

معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم:

$$x_A = \frac{1}{2}a_A t^2 \rightarrow x_A = \frac{1}{2}at^2$$

$$x_B = \frac{1}{2}a_B(t-3)^2 \rightarrow x_B = \frac{1}{2}(a+2)(t-3)^2 = \frac{1}{2}at^2 - 3at + \frac{9}{2}a + t^2 - 6t + 9$$

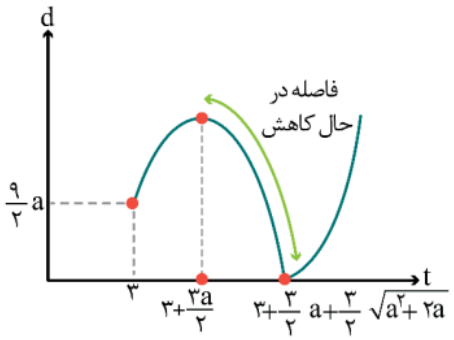
$$\rightarrow x_B = \frac{1}{2}at^2 + (t^2 - (3a+6)t + (\frac{9}{2}a + 9))$$

گام دوم:

فاصلهٔ دو متحرک برابر است با:

$$\text{فاصله}: d = |x_B - x_A| = \left|t^2 - (3a+6)t + (\frac{9}{2}a + 9)\right|$$

بنابراین نمودار فاصلهٔ دو متحرک برحسب زمان به شکل زیر است:



$$t_{\text{راس}} = \frac{3a+6}{2} = 3 + \frac{3}{2}a$$

$$\text{ریشه‌ها}: t = \frac{3a+6 \pm \sqrt{(3a+6)^2 - (18a+36)}}{2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 + \frac{3}{2}a - \frac{3}{2}\sqrt{a^2+2a} \\ t_2 = 3 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{2}\sqrt{a^2+2a} \end{cases}$$

دقت کنید که نمودار را از لحظهٔ $t = 3s$ به بعد رسم کردیم که متحرک B هم راه افتاده باشد. مطابق نمودار، مدت زمان کاهش فاصله برابر $\frac{3}{2}\sqrt{a^2+2a}$ است.

$$\frac{3}{2}\sqrt{a^2+2a} = 2 \rightarrow a^2+2a = \frac{16}{9} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{3}\frac{m}{s^2} & \checkmark \\ a = \frac{-8}{3}\frac{m}{s^2} & \times \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ فاصلهٔ دو متحرک برابر می‌شود با:

$$d = \left|t^2 - (3a+6)t + (\frac{9}{2}a + 9)\right|$$

$$\xrightarrow{a=\frac{2}{3}\frac{m}{s^2}} d = \left|t^2 - 8t + 12\right|$$

$$\xrightarrow{t=4s} d = \left|4^2 - 8\times 4 + 12\right| = 4m$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۹

گام اول:

رسم نمودار سرعت ـ زمان از روی نمودار شتاب ـ زمان داده‌شده:

با توجه به اینکه سطح محصور بین نمودار شتاب ـ زمان و محور زمان برابر تغییرات سرعت (Δv)است، در سه بازهٔ زمانی ۰ تا ۱۰s، ۱۰s تا ۱۵s و ۱۵s تا ۳۰s، سطح محصور بین نمودار شتاب ـ زمان و محور زمان را به صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\text{بازهٔ زمانی ۰ تا ۱۰s}: \Delta v_1 = \text{مساحت مستطیل} = ۴\times۱۰ = ۴۰\frac{m}{s}$$

$$\text{بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۱۵s}: \Delta v_2 = ۰$$

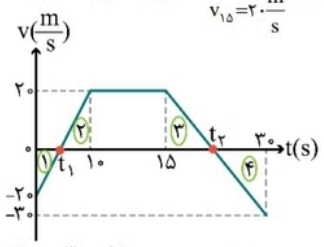
$$\text{بازهٔ زمانی ۱۵s تا ۳۰s}: \Delta v_3 = \text{مساحت مستطیل} = -\frac{۱۰}{۳}\times(۳۰-۱۵) = -۵۰\frac{m}{s}$$

حال سرعت در لحظه‌های ۱۰s، ۱۵s و ۳۰s را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta v_1 = v_{۱۰} - v_0 \xrightarrow[v_0=-۲۰\frac{m}{s}]{\Delta v_1=۴۰\frac{m}{s}} ۴۰ = v_{۱۰} - (-۲۰) \to v_{۱۰} = ۲۰\frac{m}{s}$$

$$\Delta v_2 = v_{۱۵} - v_{۱۰} \xrightarrow[v_{۱۰}=۲۰\frac{m}{s}]{\Delta v_2=۰} ۰ = v_{۱۵} - ۲۰ \to v_{۱۵} = ۲۰\frac{m}{s}$$

$$\Delta v_3 = v_{۳۰} - v_{۱۵} \xrightarrow[v_{۱۵}=۲۰\frac{m}{s}]{\Delta v_3=-۵۰\frac{m}{s}} -۵۰ = v_{۳۰} - ۲۰ \to v_{۳۰} = -۳۰\frac{m}{s}$$



و حالا نوبت رسم نمودار سرعت ـ زمان است:

با استفاده از تشابه مثلث‌های(۱) و(۲) ، لحظه‌ی t_1 را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۲۰}{۲۰} = \frac{۱۰-t_1}{t_1} \to ۱۰-t_1 = t_1 \to ۲t_1 = ۱۰ \to t_1 = ۵s$$

با استفاده از تشابه مثلث‌های (۳) و (۴)، لحظه‌ی t_2 را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{۳۰}{۲۰} = \frac{۳۰-t_2}{t_2-۱۵} \to ۳t_2 - ۴۵ = ۶۰ - ۲t_2 \to ۵t_2 = ۱۰۵ \to t_2 = ۲۱s$$

گام دوم:

رسم مسیر حرکت متحرک بر روی محور x به کمک سطح محصور بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان:

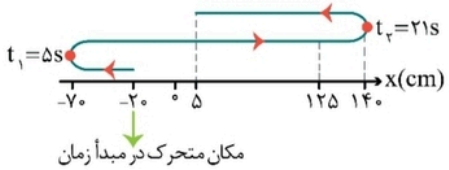
با توجه به اینکه سطح محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان برابر جابه‌جایی (Δx) است، در سه بازهٔ زمانی ۰ تا ۵s، ۵s تا ۲۱s و ۲۱s تا ۳۰s، سطح محصور بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان را به‌صورت جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\text{بازهٔ زمانی ۰ تا ۵s}: \Delta x_1 = \text{مساحت مثلث}(۱) = \frac{-۲۰\times۵}{۲} = -۵۰m$$

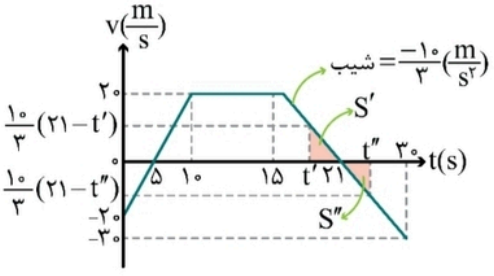
$$\text{بازهٔ زمانی ۵s تا ۲۱s}: \Delta x_2 = \text{مساحت ذوزنقه} = \frac{(۵+۱۶)\times۲۰}{۲} = ۲۱۰m$$

$$\text{بازهٔ زمانی ۲۱s تا ۳۰s}: \Delta x_3 = \text{مساحت مثلث}(۴) = \frac{-۳۰\times۹}{۲} = -۱۳۵m$$

و حالا رسم مسیر حرکت متحرک بر روی محور x:



بنابراین متحرک یک بار قبل از لحظهٔ $t_2 = ۲۱s$ و یک بار پس از آن از مکان $x = ۱۲۵m$ می‌گذرد. باتوجه به این که مکان متحرک در لحظهٔ $t_2 = ۲۱s$ برابر $x = ۱۴۰m$ است، برای یافتن لحظات عبور از مکان $x = ۱۲۵m$، کافی است در نمودار زیر، لحظات t' و t'' را به گونه‌ای پیدا کنیم که مساحت‌های S' و S'' برابر ۱۵m شوند.



$$S' = ۱۵m \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰}{۳}(۲۱-t')(۲۱-t') = ۱۵$$

$$\Rightarrow (۲۱-t')^2 = ۹ \xrightarrow{t'<۲۱s} ۲۱-t' = ۳ \Rightarrow t' = ۱۸s$$

$$|S''| = ۱۵m \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰}{۳}\times(۲۱-t'')^2 = ۱۵$$

$$\Rightarrow (۲۱-t'')^2 = ۹ \xrightarrow{t''>۲۱s} ۲۱-t'' = -۳ \Rightarrow t'' = ۲۴s$$

پس فاصلهٔ زمانی بین دو عبور از مکان $x = ۱۲۵m$ برابر $t'' - t' = ۶s$ است.

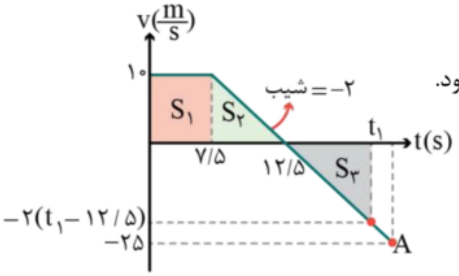
SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

www.MrKonkor.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۰

گام اول:



ابتدا حرکت متحرک A را بررسی می‌کنیم تا ببینیم در چه بازه‌ای، این متحرک به مبدأ مکان نزدیک می‌شود.

متحرک A ابتدا به اندازهٔ $S_۱ + S_۲$ در جهت محور x حرکت می‌کند و سپس سرعت آن منفی می‌شود و به سمت مبدأ مکان باز می‌گردد. اگر $S_۱ + S_۲ = |S_۳|$ شود، آن‌گاه متحرک دوباره به مبدأ مکان رسیده است و مکان آن پس از لحظهٔ $t_۱$ منفی خواهد شد.

$$S_۱ + S_۲ = |S_۳| \rightarrow ۷۵ + ۲۵ = (t_۱ - ۱۲/۵)^۲$$

$$\rightarrow (t_۱ - ۱۲/۵)^۲ = ۱۰۰ \rightarrow t_۱ = ۲۲/۵\,s$$

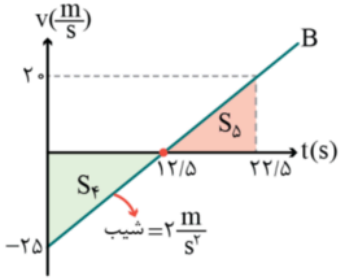
بنابراین مسیر حرکت متحرک A مطابق شکل زیر است:



پس در بازهٔ زمانی $t = ۱۲/۵\,s$ تا $t = ۲۲/۵\,s$، متحرک A در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است.

گام دوم:

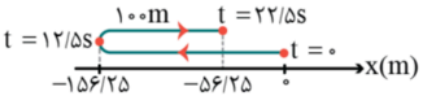
حال حرکت متحرک B را بررسی می‌کنیم:



$$|S_۴| = \frac{۲۵ \times ۱۲/۵}{۲} = ۱۵۶/۲۵\,m$$

$$|S_۵| = \frac{۱۰ \times ۲۰}{۲} = ۱۰۰\,m$$

بنابراین مسیر حرکت متحرک B به شکل زیر است:



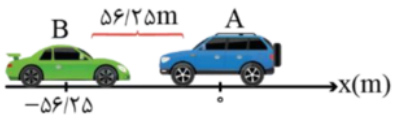
گام سوم:

اگر نتایج قسمت‌های قبل را در کنار هم قرار دهیم، به شکل‌های زیر می‌رسیم.

در لحظهٔ $t = ۱۲/۵\,s$:



در لحظهٔ $t = ۲۲/۵\,s$:



بنابراین فاصلهٔ دو متحرک ۲۰۰m کاهش یافته است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۱ از معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow{t=0\ ,\ x_0=0} x = \frac{v^2}{2a} - \frac{v_0^2}{2a}$$

از مساوی قرار دادن این رابطه با معادلهٔ مکان ـ سرعت داده‌شده در صورت سؤال، داریم:

$$\frac{1}{2a} = 0/2 \rightarrow a = 2/5\,\frac{m}{s^2}$$

$$20 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2(2/5)} \rightarrow |v_0| = 10\,\frac{m}{s} \rightarrow v_0 = -10\,\frac{m}{s}$$

علامت منفی به خاطر این است که جهت حرکت اولیه در خلاف جهت محور x است.

چون می‌خواهیم مکان جسم در فاصلهٔ ۶۰ متری از مبدأ مکان باشد، پس مکان جسم می‌تواند $x = -60\,m$ یا $x = +60\,m$ باشد.

اگر $x = -60\,m$ باشد، داریم:

$$x = 0/2v^2 - 20 = -60 \rightarrow 0/2v^2 = -40 \rightarrow v^2 = -200 \text{ غ ق ق}$$

این نتیجه به این معنی است که مکان جسم نمی‌تواند $-60\,m$ باشد.

اگر $x = +60\,m$ باشد، می‌توان نوشت:

$$x = 0/2v^2 - 20 \Rightarrow 60 = 0/2v^2 - 20 \Rightarrow v^2 = 400 \Rightarrow v = \pm 20\,\frac{m}{s}$$

باتوجه به معادلهٔ سرعت ـ زمان درحرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_0=-10\,\frac{m}{s}]{a=\frac{5}{2}\,\frac{m}{s^2}} v = \frac{5}{2}t - 10$$

$$\xrightarrow{v=\pm 20\,\frac{m}{s}} \pm 20 = \frac{5}{2}t - 10 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 12s & (\checkmark) \\ t_2 = -4s & (\times) \end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

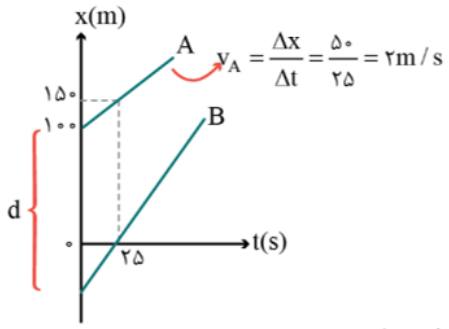
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۲ ابتدا تندی نسبی دو متحرک را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که چون دو متحرک هم‌جهت حرکت می‌کنند، تندی نسبی دو متحرک به‌صورت زیر حساب می‌شود:

$$v_B > v_A$$

$$v_{\text{نسبی}} = v_B - v_A$$

و همچنین می‌توان v_A را از شیب نمودار $x-t$ به دست آورد



$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۵۰}{۲۵} = ۲\,m/s$$

$$\Rightarrow v_{\text{نسبی}} = v_B - ۲$$

در لحظه t_1، برای اولین بار فاصلهٔ دو متحرک ۴۰ متر می‌شود. در این مدت $\Delta x_{\text{نسبی}}$ دو متحرک برابر است با:

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = d - ۴۰$$

و در لحظهٔ t_2، برای دومین بار فاصلهٔ دو متحرک از هم ۴۰ متر می‌شود. در این مدت $\Delta x_{\text{نسبی}}$ دو متحرک برابر است با:

$$\Delta x_{\text{نسبی}} = d + ۴۰$$

با توجه به رابطهٔ $\Delta x_{\text{نسبی}} = v_{\text{نسبی}}\Delta t$، می‌توان نوشت:

$$۰ \to t_1 : \ \Delta x_{\text{نسبی}} = d - ۴۰ = v_{\text{نسبی}}\Delta t \xrightarrow[\Delta t = t_1]{v_{\text{نسبی}} = v_B - ۲} d - ۴۰ = (v_B - ۲)t_1 \qquad (I)$$

$$۰ \to t_2 : \ \Delta x_{\text{نسبی}} = d + ۴۰ = v_{\text{نسبی}}\Delta t \xrightarrow[\Delta t = t_2]{v_{\text{نسبی}} = v_B - ۲} d + ۴۰ = (v_B - ۲)t_2 \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} \frac{d+۴۰}{d-۴۰} = \frac{(v_B-۲)t_2}{(v_B-۲)t_1} \xrightarrow{\frac{t_2}{t_1}=\frac{۳}{۲}} \frac{d+۴۰}{d-۴۰} = \frac{۳}{۲} \Rightarrow ۳d - ۱۲۰ = ۲d + ۸۰ \Rightarrow d = ۲۰۰\,m$$

فاصلهٔ اولیه دو متحرک $d = ۲۰۰\,m$ می‌باشد، پس مکان اولیه متحرک B، $x_{B_0} = -۱۰۰\,m$ می‌باشد.

تندی متحرک B را می‌توان با استفاده از رابطه $v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ در بازه صفر تا ۲۵S به‌دست آورد:

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta x = ۱۰۰]{\Delta t = ۲۵s} v_B = \frac{۱۰۰}{۲۵} = ۴\frac{m}{s}$$

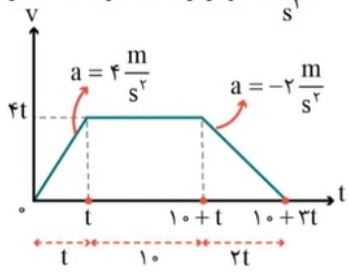
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۳

گام اول:

۱ـ ابتدا نمودار $v-t$ متحرک را رسم می‌کنیم. به این نکته دقت کنیم که چون اندازهٔ شتاب مرحلهٔ تندشونده حرکت $(۴\frac{m}{s^۲})$ دو برابر شتاب مرحله کندشونده حرکت می‌باشد، پس مدت زمان حرکت تندشونده، نصف مدت زمان حرکت کندشونده خواهد بود.



۲ـ مساحت زیر نمودار $v-t$ با مسافت طی شده که ۱۰۴ متر می‌باشد برابر است، پس داریم:

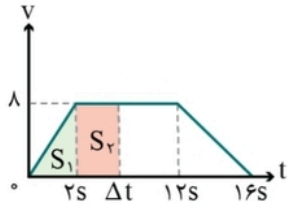
$$S=\frac{(۱۰+۳t+۱۰)۴t}{۲}=۱۰۴\Rightarrow ۳t^۲+۲۰t-۵۲=۰$$

در معادلهٔ درجهٔ دوم به‌دست آمده، $\Delta=b^۲-۴ac=(۲۰)^۲-۴(۳)(-۵۲)=۱۰۲۴>۰$ پس برای به‌دست آوردن t داریم:

$$t=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}\rightarrow t=\frac{-۲۰\pm(۳۲)}{۶}\rightarrow\begin{cases}t=-\frac{۲۶}{۳}(\text{غیر قابل قبول}\times)\\ t=۲\ (\checkmark)\end{cases}$$

گام دوم:

با توجه به اینکه $t=۲s$ می‌باشد، پس تندی متحرک پس از ۲ ثانیه به $۸\frac{m}{s}$ می‌رسد. نمودار $v-t$ به‌صورت زیر می‌شود و برای به‌دست آوردن خواستهٔ سؤال، می‌توانیم بنویسیم:



$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}\xrightarrow{L=\frac{۱}{۴}(۱۰۴)=۲۶}s_{av}=\frac{۲۶}{\Delta t}$$
$$۲۶=S_۱+S_۲$$

متحرک در ۲ ثانیه اول حرکت به اندازهٔ $S_۱=۸m$ جابه‌جا می‌شود و ۱۸m باقی‌مانده را با تندی ثابت $۸\frac{m}{s}$ در مدت $(\Delta t-۲)$ طی می‌کند پس داریم:

$$S_۲=۱۸=۸(\Delta t-۲)\Rightarrow \Delta t-۲=۲/۲۵\Rightarrow \Delta t=۴/۲۵s$$

تندی متوسط حرکت در بازهٔ زمانی خواسته شده برابر است با:

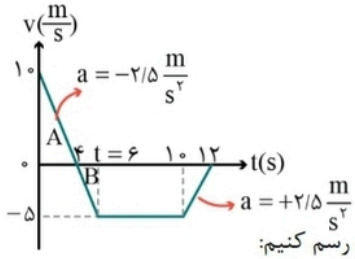
$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۴/۲۵]{L=۲۶}s_{av}=\frac{۲۶}{۴/۲۵}=\frac{۱۰۴}{۱۷}(\frac{m}{s})$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۴

گام اول:

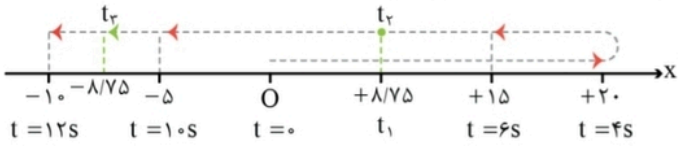


ابتدا با توجه به نمودار $v-t$ و تشابه دو مثلث A و B، لحظهٔ t را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{نسبت تشابه}: \frac{۱۰}{۵}=\frac{۴}{t-۴} \Rightarrow t=۶s$$

گام دوم:

برای درک بهتر مسئله، مسیر حرکت متحرک را در بازه‌های زمانی مختلف که نوع حرکت متحرک عوض می‌شود رسم کنیم:



در بازه‌های زمانی: ۱) صفر تا t_1 ۲) t_1 تا t_2 ، ۳) t_2 تا ۱۰s ، t_3 تا ۱۰s فاصله متحرک از مبدأ مکان کمتر از ۸/۷۵ متر می‌باشد.

گام سوم:

محاسبهٔ t_1: در بازهٔ صفر تا t_1 متحرک با شتاب ثابت $a=-۲/۵\frac{m}{s^۲}$ و $v_۰=۱۰\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند پس داریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \xrightarrow[x=۸/۷۵]{a=-۲/۵\,,\,v_۰=۱۰} ۸/۷۵=-۱/۲۵t_۱^۲+۱۰t_۱ \Rightarrow ۳۵=-۵t_۱^۲+۴۰t_۱ \Rightarrow t^۲-۸t+۷=۰$$

$$\Rightarrow (t_۱-۱)(t_۱-۷)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱=۱s \checkmark \\ t_۱=۷s \times \end{cases}$$

محاسبهٔ t_2: متحرک در بازهٔ ۶s تا t_2 با تندی ثابت $۵\frac{m}{s}$ حرکت کرده است. پس داریم:

$$x=vt+x_۰ \xrightarrow[x=۸/۷۵]{v=-۵\frac{m}{s}\,,\,x_۰=۱۵} ۸/۷۵=-۵(t_۲-۶)+۱۵ \Rightarrow -۵t_۲+۳۰=-۶/۲۵ \Rightarrow t_۲=\frac{-۳۶/۲۵}{-۵}=۷/۲۵s$$

محاسبهٔ t_3: متحرک در بازه ۱۰s تا t_3 با شتاب ثابت $+۲/۵\frac{m}{s^۲}$ و سرعت اولیهٔ $-۵\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند. داریم: $(\Delta t=t_۳-۱۰)$

$$x=\frac{۱}{۲}a(\Delta t)^۲+v_۰(\Delta t)+x_۰ \xrightarrow{a=+۲/۵\,,\,v_۰=-۵\,,\,x=-۵} -۸/۷۵=۱/۲۵\Delta t^۲-۵\Delta t-۵$$

$$\Rightarrow ۵\Delta t^۲-۲۰\Delta t+۱۵=۰ \Rightarrow \Delta t^۲-۴\Delta t+۳=۰ \Rightarrow (\Delta t-۱)(\Delta t-۳)=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta t=۱ \Rightarrow t_۳-۱۰=۱ \rightarrow t_۳=۱۱s \checkmark \\ \Delta t=۳ \Rightarrow t_۳-۱۰=۳ \rightarrow t_۳=۱۳s \times \end{cases}$$

گام چهارم:

پس در مجموع متحرک در بازه‌های زمانی (۰,۱s) و (۷/۲۵s,۱۰s) و (۱۰s,۱۱s) فاصلهٔ کمتر از ۸/۷۵ متر با مبدأ محور دارد.

$$\text{مدت زمان کل} = ۱s+۲/۷۵s+۱s=۴/۷۵s$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۵

گام اول:

فرض کنیم که سرعت اولیهٔ متحرک برابر v_0 باشد پس در بازه‌های زمانی داده شده در نمودار داریم:

$$0 \to 3s : v_0 \xrightarrow[\Delta t=3]{a=+4} v_{3s} = v_0 + 12$$

$$3s \to 6s : v_0 + 12 \xrightarrow[\Delta t=3s]{a=-2} v_{6s} = v_0 + 6$$

$$6s \to 8s : v_0 + 6 \xrightarrow[\Delta t=2s]{a=-4} v_{8s} = v_0 - 2$$

$$8s \to 10s : v_0 - 2 \xrightarrow[\Delta t=2s]{a=+5} v_{10s} = v_0 + 8$$

گام دوم:

می‌توانیم در هر بازه زمانی جابجایی متحرک را با روابط شتاب ثابت (در اینجا از مستقل از شتاب استفاده کرده‌ایم) به‌دست آوریم:

$$0 \to 3s:\ \Delta x_1 = \frac{v_0 + v_{3s}}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{v_0 + v_0 + 12}{2} \times 3 = 3v_0 + 18$$

$$3s \to 6s:\ \Delta x_2 = \frac{v_{3s} + v_{6s}}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{v_0 + 12 + v_0 + 6}{2} \times 3 = 3v_0 + 27$$

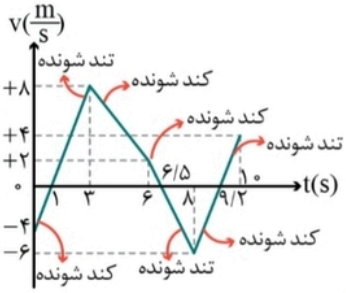
$$6s \to 8s:\ \Delta x_3 = \frac{v_{6s} + v_{8s}}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x_3 = \frac{v_0 + 6 + v_0 - 2}{2} \times 2 = 2v_0 + 4$$

$$8s \to 10s:\ \Delta x_4 = \frac{v_{8s} + v_{10s}}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x_4 = \frac{v_0 - 2 + v_0 + 8}{2} \times 2 = 2v_0 + 6$$

مجموع جابه‌جایی هر بازهٔ زمانی، برابر جابه‌جایی کل می‌باشد. پس در نتیجه داریم:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \Delta x_4 \Rightarrow 15 = 10v_0 + 55 \Rightarrow 10v_0 = -40 \Rightarrow v_0 = -4\frac{m}{s^2}$$ (رد عبارت «الف»)

گام سوم:



اکنون می‌توانیم نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم کنیم:

بازهٔ زمانی کندشونده: $(0,1s), (3s, 6/5s), (8, 9/2s)$

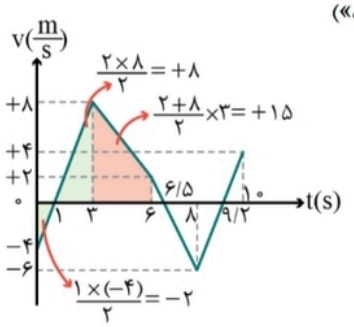
- در مجموع ۵/۷ ثانیه حرکت کندشونده می‌باشد.

بازهٔ زمانی تندشونده: $(1s, 3s), (6/5s, 8s), (9/2s, 10s)$

- در مجموع ۴/۳ ثانیه حرکت تندشونده می‌باشد.

می‌بینیم که مدت زمان حرکت کندشونده ۱/۴ ثانیه بیشتر از مدت زمان حرکت تندشونده می‌باشد. (رد عبارت «ب»)

متحرک در لحظات $t_1 = 1s$ ، $t_2 = 6/5s$ و $t_3 = 9/2s$ تغییر جهت داده است. (درستی عبارت «د»)



با توجه به نمودار $v-t$، جابه‌جایی متحرک در ۶ ثانیهٔ اول حرکت برابر ۲۱ متر می‌باشد،

پس $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{21}{6} = 3/5\frac{m}{s}$ می‌باشد. (درستی عبارت «ج»)

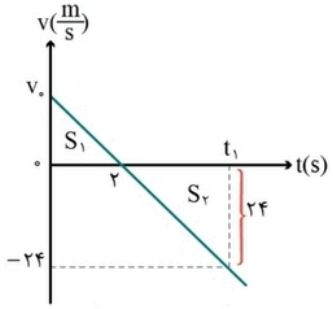
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۶

گام اول:

با توجه به نمودار مکان ـ زمان متحرک، نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم.



گام دوم:

جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t=0$ تا t_1 برابر $-64m$ می‌باشد. در نمودار سرعت ـ زمان جابه‌جایی با مساحت زیر نمودار برابر است، پس داریم:

$$S_1 - S_2 = -64 \rightarrow \frac{v_0 \times 2}{2} - \frac{(t_1-2)\times 24}{2} = -64$$

$$\Rightarrow v_0 - 12(t_1-2) = -64 \qquad (1)$$

همچنین از تشابه دو مثلث با مساحت‌های S_1 و S_2 داریم:

$$\frac{v_0}{24} = \frac{2}{(t_1-2)} \rightarrow v_0 = \frac{48}{(t_1-2)} \qquad (2)$$

گام سوم:

از رابطه (۲)، سرعت اولیه (v_0) را در معادله (۱) قرار می‌دهیم:

$$\frac{48}{(t_1-2)} - 12(t_1-2) = -64 \Rightarrow 48 - 12(t_1-2)^2 = -64(t_1-2) \Rightarrow 3(t_1-2)^2 - 16(t_1-2) - 12 = 0$$

با استفاده از تغییر متغیر $(t_1-2)=A$ معادله را ساده‌تر می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(t_1-2)=A} 3A^2 - 16A - 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\Delta = b^2-4ac} \Delta = (-16)^2 - 4(3)(-12) = 256 + 144 = 400 \Rightarrow A = \frac{16 \pm \sqrt{400}}{(2\times 3)} = \frac{16 \pm 20}{6}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A = 6 \rightarrow t_1 - 2 = 6 \rightarrow t_1 = 8s \ \checkmark \\ A = -\frac{2}{3} \rightarrow t_1 - 2 = -\frac{2}{3} \rightarrow t_1 = \frac{4}{3}s \ \times \end{cases}$$

با به‌دست آمدن t_1 می‌توان v_0 را نیز به‌دست آورد:

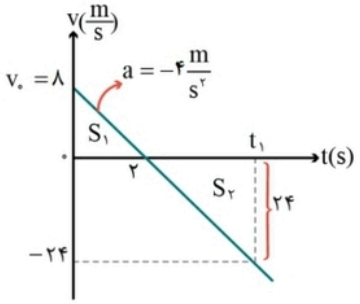
$$v_0 = \frac{48}{t_1 - 2} \xrightarrow{t_1=8} v_0 = \frac{48}{8-2} = 8\frac{m}{s}$$

و همچنین شتاب حرکت نیز برابر با شیب نمودار سرعت زمان می‌باشد:

$$a = -4\frac{m}{s^2}$$

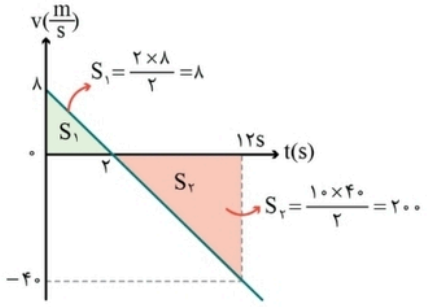
گام سوم:

معادلهٔ $v-t$ (سرعت - زمان) متحرک به‌صورت مقابل می‌باشد:



$$v = at + v_0 \xrightarrow{a=-4\,,\ v_0=8} v = -4t + 8$$

برای به‌دست آوردن تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی ۰s تا ۱۲s با استفاده از نمودار $v-t$ داریم:



$$t = 12s \Rightarrow v = -4\times 12 + 8 = -40\frac{m}{s}\ ,\ L = |S_1| + |S_2| = 8 + 200 = 208m$$

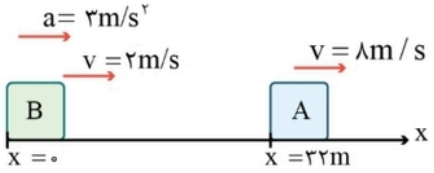
$$\Rightarrow s_{av} = \frac{L}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 12s]{L=208m} s_{av} = \frac{208}{12} = \frac{52}{3}$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۷

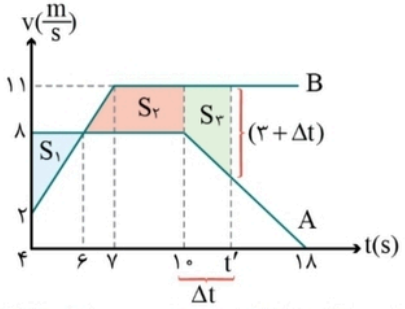
گام اول:

با توجه به اینکه اتومبیل B با اختلاف زمانی ۴ ثانیه‌ای نسبت به اتومبیل A حرکت می‌کند، برای راحتی کار، می‌توانیم حرکت دو اتومبیل را پس از لحظهٔ $t = 4s$ بررسی کنیم و توجه کنیم که در مدت این ۴ ثانیه، متحرک A با تندی ثابت به اندازهٔ $\Delta x = v\Delta t = 8\times 4 = 32m$ حرکت کرده و از مبدأ محور دور شده است. پس از لحظه $t = 4s$ به بعد که متحرک B نیز در حرکت می‌باشد، حرکت را بررسی کنیم. وضعیت قرارگیری دو اتومبیل در لحظهٔ $t = 4s$ به صورت زیر می‌باشد.



گام دوم:

نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک را از لحظهٔ $t = 4s$ به بعد رسم کنیم:



$$S_1 = \frac{2\times 6}{2} = 6$$

$$S_2 = \frac{4+3}{2}\times 3 = 10/5$$

$$S_3 = \frac{(3+3+\Delta t)}{2}\times \Delta t = \frac{(6+\Delta t)}{2}\Delta t$$

دقت کنید که در لحظهٔ $t = 4s$ متحرک A، ۳۲ متر جلوتر از متحرک B می‌باشد. تا لحظهٔ $t = 6s$ این فاصله به ۳۸ متر افزایش می‌یابد و پس از این لحظه فاصله دو متحرک به مرور کاهش می‌یابد و در لحظه t' به ۱۴ متر می‌رسد. پس با توجه به مساحت‌های حساب شده داریم:

$$(32+S_1)-(S_2+S_3)=14 \xrightarrow[S_3=\frac{(6+\Delta t)}{2}\Delta t]{S_1=6\ ,S_2=10/5} 38-10/5-\left(\frac{(6+\Delta t)}{2}\Delta t\right)=14 \Rightarrow \frac{(6+\Delta t)}{2}\Delta t = 13/5$$

$$\Rightarrow 6\Delta t+\Delta t^2 = 27 \Rightarrow \begin{cases}\Delta t = 3s \ \checkmark \xrightarrow{\Delta t = t'-10} t' = 13s\\ \Delta t = -9 \ \times\end{cases}$$

گام سوم:

با توجه به اینکه شتاب حرکت اتومبیل A از لحظهٔ ۱۰s به بعد، $(-1\frac{m}{s^2})$ می‌باشد، پس داریم:

$$a_A = -1 = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t=3s} \Delta v = -3\frac{m}{s} \Rightarrow v_{A(t'=13s)} = 5\frac{m}{s}$$

گام چهارم:

در لحظه $t' = 13s$، تندی متحرک A برابر $5\frac{m}{s}$ و تندی متحرک B برابر $11\frac{m}{s}$ می‌باشد پس:

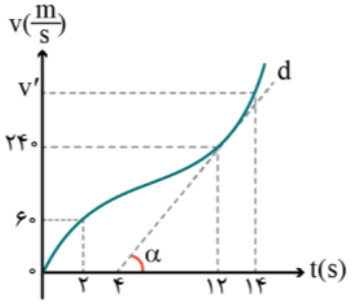
$$v_B - v_A = 11-5 = 6\frac{m}{s}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۸

گام اول:



شتاب متحرک در لحظهٔ $t=۱۲s$ برابر شیب خط d است.

$$a=\tan\alpha=\frac{۲۴۰-۰}{۱۲-۴}=۳۰\frac{m}{s^۲}$$

گام دوم:

طبق صورت سؤال، شتاب متحرک در لحظهٔ $t=۱۲s$ برابر شتاب متوسط متحرک از $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۱۴s$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$a=a_{av}\rightarrow ۳۰=\frac{v'-۶۰}{۱۴-۲}\rightarrow v'=۴۲۰\frac{m}{s}$$

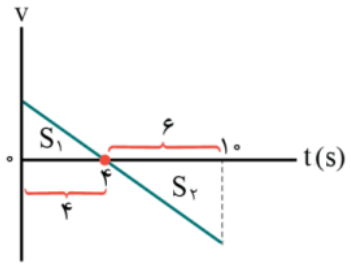
گام سوم:

حال شتاب متوسط در بازه‌های ۲ ثانیهٔ اول و ۲ ثانیهٔ هفتم حرکت برابر است با:

$$\begin{cases}a_{av_۱}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۶۰-۰}{۲-۰}=۳۰\frac{m}{s^۲}\\ a_{av_۲}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۴۲۰-۲۴۰}{۱۴-۱۲}=۹۰\frac{m}{s^۲}\end{cases}\rightarrow a_{av_۲}-a_{av_۱}=۶۰\frac{m}{s^۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۹



جابه‌جایی متحرک در ۱۰ ثانیه اول حرکت را داریم. با توجه به نمودار سرعت ـ زمان داریم:

$$\frac{S_۲}{S_۱}=(\frac{۶}{۴})^۲\rightarrow\frac{S_۲}{S_۱}=\frac{۹}{۴}\rightarrow S_۲=\frac{۹}{۴}S_۱$$

جابه‌جایی در ۱۰ ثانیه اول حرکت ۲۰ متر در خلاف جهت محور x است، یعنی $S_۱-S_۲$ برابر $-۲۰m$ است.

$$S_۱-S_۲=-۲۰\rightarrow S_۱-\frac{۹}{۴}S_۱=-۲۰\rightarrow\frac{-۵}{۴}S_۱=-۲۰$$

$$\rightarrow S_۱=۱۶m\ ,\ |S_۲|=\frac{۹}{۴}\times۱۶=۳۶m$$

$|S_۲|$ مسافتی است که متحرک تندشونده حرکت کرده است و برای محاسبهٔ تندی متوسط داریم:

$$s_{av}=\frac{|S_۲|}{\Delta t}=\frac{۳۶}{۶}=۶\frac{m}{s}$$

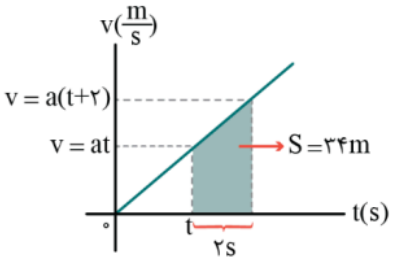
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵۰

گام اول:

متحرک از حال سکون به حرکت درآمده است بنابراین نمودار سرعت ـ زمان آن مطابق شکل است.



$$\frac{at + a(t+۲)}{۲} \times ۲ = ۳۴$$

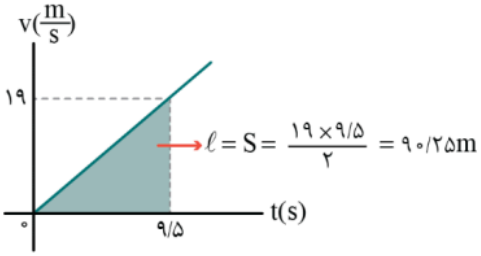
$$at + at + ۲a = ۳۴$$

$$۲at + ۲a = ۳۴ \rightarrow ۴t + ۴ = ۳۴$$

$$\rightarrow t = ۷/۵s$$

گام دوم:

حال برای محاسبهٔ فاصلهٔ A تا B خواهیم داشت:



(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۱

معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را می‌نویسیم و آن‌ها را با هم برابر قرار می‌دهیم تا ببینیم در چه لحظه‌ای به هم می‌رسند.

$$x_A = vt + x_. \Rightarrow x_A = ۸t$$

$$x_B = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_.t + x_. \Rightarrow x_B = t^۲ + ۱۸$$

$$x_A = x_B \Rightarrow ۸t = t^۲ + ۱۸ \Rightarrow t^۲ - ۸t + ۱۸ = ۰$$

دلتای معادلهٔ درجهٔ ۲ بالا برابر $\Delta = b^۲ - ۴ac = ۶۴ - ۷۲ = -۸$ است که عددی منفی می‌باشد و این معادله ریشهٔ حقیقی ندارد، یعنی دو متحرک از کنار هم نمی‌گذرند.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵۲

گام اول:

رأس سهمی در لحظهٔ $t = ۸s$ قرار دارد، پس طبق نکتهٔ ارائه شده، بازهٔ زمانی مورد نظر سؤال، بازهٔ $۶/۵s < t < ۹/۵s$ است.

گام دوم:

ابتدا با توجه به اطلاعات نمودار، شتاب حرکت را بدست می‌آوریم. سرعت در لحظهٔ $t = ۸s$ برابر با صفر است، پس با توجه به مفهوم شتاب، سرعت در لحظهٔ $t = ۴s$، یعنی ۴ ثانیهٔ قبل از رأس برابر $v = -۴a$ است. جابه‌جایی در این بازه برابر است با:

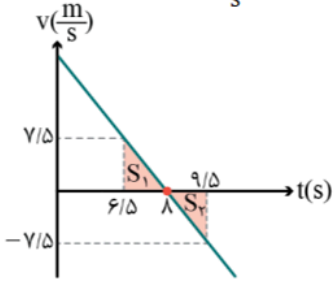
$$\Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲}\Delta t \Rightarrow (۱۲۴۰ - ۱۲۰۰) = \frac{-۴a + ۰}{۲} \times ۴$$

$$\Rightarrow ۴۰ = -۸a \Rightarrow a = -۵\frac{m}{s^۲}$$

گام سوم:

سرعت در لحظهٔ $t = ۶/۵s$ (۱/۵s قبل از رأس) برابر $v = -۱/۵a = ۷/۵\frac{m}{s}$ و در لحظهٔ $t = ۹/۵s$ (۱/۵s پس از رأس) برابر $v = ۱۵a = -۷/۵\frac{m}{s}$ است.

به عبارتی می‌توان نمودار سرعت ـ زمان را به شکل زیر رسم کرد.



مسافت: $\ell = |S_۱| + |S_۲| = ۲|S_۱| = ۲ \times \frac{۱/۵ \times ۷/۵}{۲} = ۱۱/۲۵m$

تغییرات تکانه: $\Delta p = m\Delta v = ۸۰۰ \times (-۷/۵ - ۷/۵) = -۱۲۰۰\frac{kg.m}{s} \Rightarrow |\Delta p| = ۱۲۰۰\frac{kg.m}{s}$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵۳

گام اول:

ابتدا با مقایسهٔ معادلهٔ داده شده و معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت با شتاب ثابت، داریم:

$$\begin{cases} x = ۲t^۲ - ۲۴t + ۱۷ \\ x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۴\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = -۲۴\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow v = ۴t - ۲۴$$

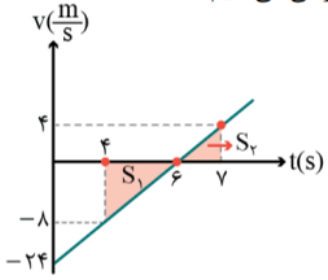
گام دوم:

در ۶ ثانیهٔ اول حرکت، v منفی است و متحرک در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند. متحرک در لحظهٔ $t = ۶s$ تغییر جهت می‌دهد و پس از لحظهٔ $t = ۶s$، چون v مثبت است، متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند.

گام سوم:

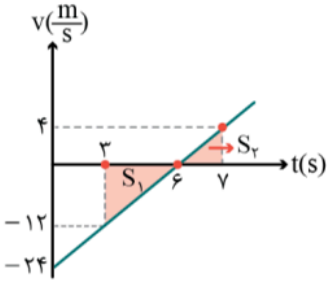
در بازه‌های زمانی گزینه‌های (۱) و (۲)، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، پس سرعت متوسط و تندی متوسط هم‌اندازه‌اند و نسبت تندی متوسط به اندازهٔ سرعت متوسط کمترین مقدار ممکن را دارد و این دو گزینه نمی‌توانند پاسخ صحیح باشند. در ادامه گزینه‌های (۳) و (۴) را بررسی می‌کنیم.

بررسی بازهٔ $۴s < t < ۷s$:



$$\begin{cases} v_{av} = \frac{-|S_۱| + |S_۲|}{\Delta t} \\ s_{av} = \frac{|S_۱| + |S_۲|}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{|S_۱| + |S_۲|}{|S_۱| - |S_۲|} = \frac{۸ + ۲}{۸ - ۲} = \frac{۵}{۳}$$

بررسی بازهٔ $۳s < t < ۷s$:



$$\begin{cases} v_{av} = \frac{-|S_۱| + |S_۲|}{\Delta t} \\ s_{av} = \frac{|S_۱| + |S_۲|}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{|S_۱| + |S_۲|}{|S_۱| - |S_۲|} = \frac{۱۸ + ۲}{۱۸ - ۲} = \frac{۵}{۴}$$

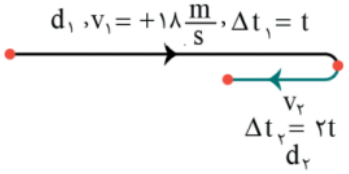
بنابراین نسبت مورد نظر در بازهٔ گزینهٔ (۳) بزرگ‌تر از سایر گزینه‌ها است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵۴

با توجه به شکل مقابل می‌توان نوشت:



سرعت متوسط در مسیر رفت:

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow 18 = \frac{d_1}{t}$$

سرعت متوسط در کل مسیر حرکت:

$$\begin{cases} v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d_1 - d_2}{t + 2t} = \frac{d_1 - d_2}{3t} \\ s_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{d_1 + d_2}{t + 2t} = \frac{d_1 + d_2}{3t} \end{cases}$$

مجموع سرعت و تندی متوسط در کل مسیر:

$$v_{av} + s_{av} = \frac{d_1 - d_2}{3t} + \frac{d_1 + d_2}{3t} = \frac{2}{3}\frac{d_1}{t}$$

$$\rightarrow v_{av} + s_{av} = \frac{2}{3} \times 18 = 12\frac{m}{s}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۵

بررسی موارد:

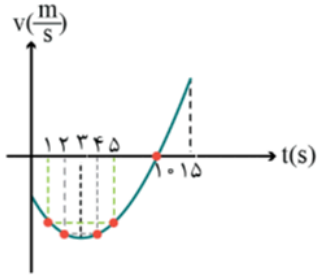
الف: با توجه به اینکه در بازهٔ زمانی صفر تا $t = 10s$ متحرک تغییر جهت نداده است، بزرگی سرعت متوسط و تندی متوسط برابر است. (✗)

ب: چون سهمی نسبت به رأس متقارن است، پس:

۱ـ بزرگی سرعت در لحظات $t = 1s$ و $t = 5s$ برابر است.

۲ـ بزرگی سرعت در لحظات $t = 2s$ و $t = 4s$ برابر است.

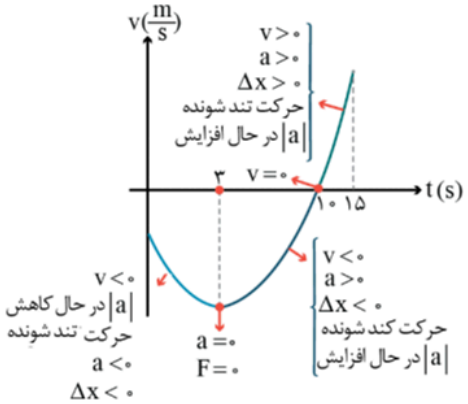
پس شتاب متوسط در ثانیه دوم و ثانیه پنجم هم‌اندازه است. (✓)



ج: در بازه صفر تا $t = 3s$ چون نمودار نزولی است، پس شیب آن یعنی شتاب منفی است پس نیرو در این بازه منفی است، یعنی نیرو ۳ ثانیه خلاف جهت محور X است. (✗)

د: در بازه $t = 10s$ تا $t = 15s$ سرعت مثبت و متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند. همان‌طور که مشخص است در این بازه شیب (شتاب) در حال افزایش است. (✗)

تحلیل کلی نمودار:



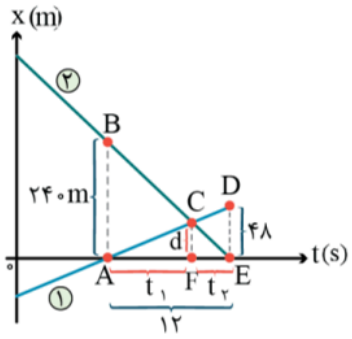
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵۶

گام اول:

ابتدا نمودار مکان ـ زمان دو متحرک را رسم می‌کنیم:



گام دوم:

دو مثلث ABC و CDE متشابه‌اند، پس:

$$\frac{۲۴۰}{۴۸}=\frac{t_۱}{t_۲}\rightarrow t_۱=۵t_۲$$

$$t_۱+t_۲=۱۲\rightarrow ۵t_۲+t_۲=۱۲\rightarrow \begin{cases} t_۲=۲s \\ t_۱=۱۰s \end{cases}$$

گام سوم:

با توجه به تشابه دو مثلث ACF و ADE داریم:

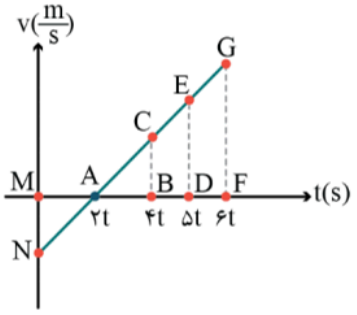
$$\frac{d}{۱۰}=\frac{۴۸}{۱۲}\rightarrow d=۴۰m$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵۷

گام اول:



سرعت متوسط در بازه صفر تا ۴t صفر است پس جابجایی در این بازه صفر است و با توجه به تقارن در حرکت شتاب ثابت متوجه می‌شویم متحرک در لحظه ۲t تغییر جهت داده است. حال نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم.

گام دوم:

طبق قضیهٔ تالس می‌دانیم که نسبت مساحت‌ها برابر توان دوم نسبت تشابه است از طرفی مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان، جابه‌جایی است، پس:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=\left(\frac{۲t}{۳t}\right)^۲ \xrightarrow{S_{ADE}=S_{ABC}+۲۵} \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}+۲۵}=\frac{۴}{۹} \rightarrow S_{ABC}=۲۰$$

گام سوم:

مساحت مثلث AMN با ABC برابر است، پس:

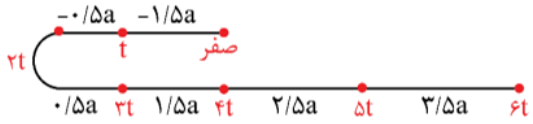
$$S_{AMN}=۲۰$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AFG}}=\left(\frac{۲t}{۴t}\right)^۲ \rightarrow \frac{۲۰}{S_{AFG}}=\frac{۱}{۴} \rightarrow S_{AFG}=۸۰$$

مسافت طی شده در بازه صفر تا ۶t : $L=S_{AMN}+S_{AFG}=۲۰+۸۰=۱۰۰m$

روش دوم:

چون سرعت متوسط در بازهٔ صفر تا ۴t صفر شده است، می‌توان فهمید در وسط این بازه، یعنی لحظهٔ ۲t، سرعت صفر است. با استفاده از جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی داریم:



$$۲/۵a=۲۵ \Rightarrow a=۱۰\frac{m}{s^۲}$$

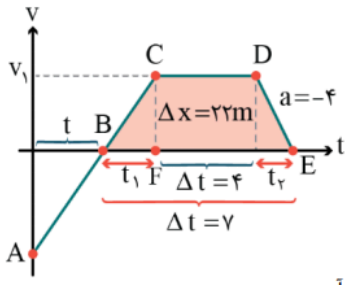
مسافت: $L=۰/۵a+۱/۵a+۰/۵a+۱/۵a+۲/۵a+۳/۵a$

$$\Rightarrow L=۱۰a=۱۰\times ۱۰=۱۰۰m$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵۸ ابتدا نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم:



با توجه به اینکه مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان برابر جابه‌جایی است. مساحت ذوزنقه را نوشته و v_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$۲۲=\frac{۴+۷}{۲}\times v_1 \rightarrow v_1=۴\frac{m}{s}$$

$$\text{در قسمت DE}: a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\rightarrow -۴=\frac{۰-۴}{t_2}\rightarrow t_2=۱s$$

$$\rightarrow t_1+۴+۱=۷\rightarrow t_1=۲s$$

$$\text{در قسمت BC}: a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۴-۰}{۲}\rightarrow a=۲\frac{m}{s^2}$$

$$\text{در قسمت AB}: a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\rightarrow ۲=\frac{۰-v_۰}{t}\rightarrow v_۰=-۲t$$

طبق صورت مسئله مسافت طی شده در مسیر ABC برابر ۱۳m است، پس:

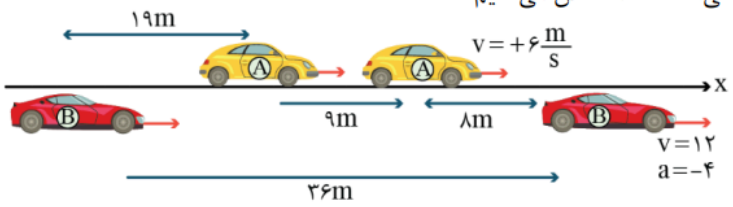
$$۱۳=\frac{t\times ۲t}{۲}+\frac{۲\times ۴}{۲}\rightarrow t=۳s\rightarrow v_۰=-۲t=-۶\frac{m}{s}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۵۹

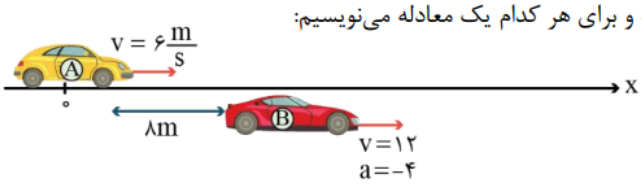
در حل چنین سؤالاتی وضعیت دو متحرک را تا لحظه تغییر نوع حرکت یعنی، $t = ۳$ مشخص می‌کنیم.



$$(A)\begin{cases}\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \rightarrow \Delta x_A = \frac{۱}{۲}\times ۲\times ۳^۲ \rightarrow \Delta x_A = ۹m \\ v = at + v_۰ \rightarrow v_A = ۲\times ۳ + ۰ \rightarrow v_A = ۶\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$(B)\ \Delta x = v\Delta t \rightarrow \Delta x_B = ۱۲\times ۳ \rightarrow \Delta x_B = ۳۶m$$

حال که وضعیت دو متحرک مشخص شده، مکان متحرک A را مبدأ مختصات گرفته و برای هر کدام یک معادله می‌نویسیم:



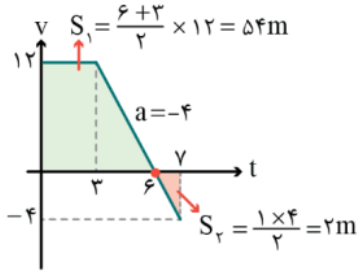
$$(A)\ x = vt + x_۰ \rightarrow x_A = ۶t$$

$$(B)\ x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \rightarrow x_B = -۲t^۲ + ۱۲t + ۸$$

شرط به هم رسیدن : $x_A = x_B \rightarrow ۶t = -۲t^۲ + ۱۲t + ۸$

$$\rightarrow ۲t^۲ - ۶t - ۸ = ۰ \rightarrow t^۲ - ۳t - ۴ = ۰ \rightarrow \begin{cases}t = -۱s \text{ غ‌ق‌ق} \\ t = ۴s\end{cases}$$

پس ۴ ثانیه پس از تغییر نوع حرکت، دو متحرک برای بار دوم به هم می‌رسند. حال نمودار سرعت ـ زمان متحرک B را رسم کرده و از طریق مساحت زیر نمودار مسافت طی شده را محاسبه می‌کنیم:



$$L = ۵۴ + ۲ = ۵۶m$$

دقت کنید چون ۳s هم قبل از تغییر نوع حرکت، دو متحرک حرکت کرده‌اند، باید مسافت طی شده تا لحظهٔ $t = ۷s$ را محاسبه کنیم.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۰

بررسی موارد:

الف: در ابتدا $x < ۰$ است و سپس $x > ۰$ می‌شود، بنابراین بردار مکان ابتدا در خلاف جهت محور x و سپس در جهت محور x است. (✗)

ب: با توجه به نمودار، مسافت طی‌شده در ۴ ثانیهٔ اول $(۰ < t < ۴s)$ بیش‌تر از مسافت طی‌شده در ۴ ثانیهٔ آخر $(۱۰s < t < ۱۴s)$ است، بنابراین تندی متوسط هم در ۴ ثانیهٔ اول بزرگ‌تر است. (✓)

ج: در لحظهٔ $t_۱ = ۲s$، سرعت مثبت و در لحظهٔ $t_۲ = ۱۲s$، سرعت منفی است، بنابراین شتاب متوسط در این بازه، منفی است و در خلاف جهت محور x است. (✗)

$$a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{\Delta t} \xrightarrow[v_۱ > ۰]{v_۲ < ۰} a_{av} < ۰$$

د: در لحظه‌ای بین صفر و ۴s، نمودار مکان-زمان، محور افقی را قطع می‌کند و تغییر علامت می‌دهد. در این بازه، شیب نمودار مثبت است و متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند. (✓)

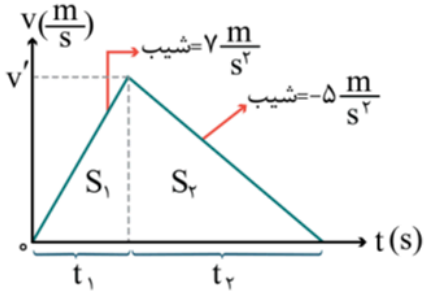
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۶۱

گام اول:

نمودار سرعت-زمان را رسم می‌کنیم:



$$\text{شیب نمودار در قسمت اول: } \frac{v'}{t_1}=7 \Rightarrow t_1=\frac{v'}{7}$$

$$\text{شیب نمودار در قسمت دوم: } \frac{-v'}{t_2}=-5 \Rightarrow t_2=\frac{v'}{5}$$

گام دوم:

مسافت طی‌شده در کل حرکت برابر S_1+S_2 است، بنابراین داریم:

$$S_1+S_2=3360 \Rightarrow \frac{v'(t_1+t_2)}{2}=3360 \Rightarrow \frac{v'(\frac{v'}{7}+\frac{v'}{5})}{2}=3360 \Rightarrow \frac{12v'^2}{70}=3360$$

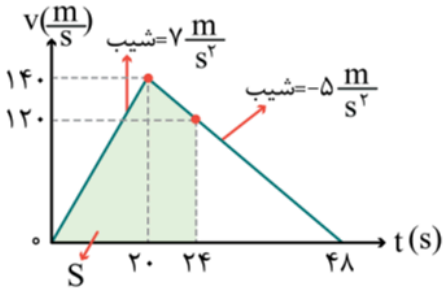
$$\Rightarrow v'^2=280\times 70 \Rightarrow v'=140\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{v'}{7}=20s \\ t_2=\frac{v'}{5}=28s \end{cases}$$

بنابراین کل زمان حرکت برابر $t_1+t_2=48s$ است.

گام سوم:

مسافت طی‌شده در نیمهٔ اول زمان، یعنی ۲۴ ثانیهٔ اول برابر است با:



$$\ell=S=\frac{140\times 20}{2}+\frac{(140+120)\times 4}{2}$$

$$\Rightarrow \ell=1400+520=1920m$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۶۲

گام اول:

زمانی که خودروی A از نقطهٔ O می‌گذرد تا لحظه‌ای که خودروی B به خودروی A برسد، $\Delta t_A=40s$ طول می‌کشد. حال جابه‌جایی خودروی A در این ۴۰ ثانیه را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta x_A=v_A\Delta t_A \Rightarrow \Delta x_A=30\times 40=1200m$$

گام دوم:

متحرک B باید طی ۳۰ ثانیه به‌اندازهٔ ۱۲۰۰ متر جابه‌جا شود. با توجه به این‌که حرکت این متحرک شتاب‌دار است، داریم:

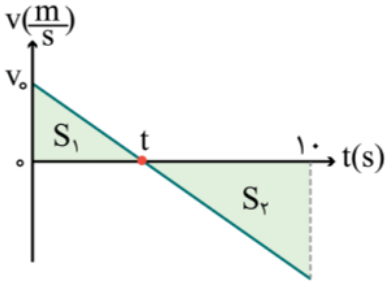
$$\Delta x_B=\frac{v'_B+v_B}{2}\times\Delta t_B \Rightarrow 1200=\frac{v'_B+0}{2}\times 30$$

$$\Rightarrow v'_B=80\frac{m}{s}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۶۳ با توجه به نمودار مکان-زمان، نمودار سرعت-زمان آن به‌صورت زیر است.



$$\ell = \frac{۵}{۴}|\Delta x| \Rightarrow S_۱ + S_۲ = \frac{۵}{۴}|S_۱ - S_۲|$$

$$\xrightarrow{S_۲ > S_۱} S_۱ + S_۲ = \frac{۵}{۴}(S_۲ - S_۱)$$

$$\Rightarrow \frac{S_۲}{۴} = \frac{۹}{۴}S_۱ \Rightarrow S_۲ = ۹S_۱$$

$$\xrightarrow{\text{با استفاده از تشابه}} \left(\frac{۱۰-t}{t}\right)^۲ = ۹ \Rightarrow \frac{۱۰-t}{t} = ۳ \Rightarrow ۱۰ = ۴t \Rightarrow t = ۲/۵s$$

با استفاده از مساحت زیر نمودار که $S_۱$ برابر ۲۵ متر است، داریم:

$$\frac{v_۰ \times ۲/۵}{۲} = ۲۵ \Rightarrow v_۰ = ۲۰\frac{m}{s}$$

درنتیجه:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} = \frac{۰-۲۰}{۲/۵} = \frac{-۲۰}{۲/۵} = -۸\frac{m}{s^۲}$$

$$\Rightarrow |a_{av}| = ۸\frac{m}{s^۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۴ فرض کنیم طول BC برابر d باشد. در مدتی که متحرک سریع‌تر فاصلهٔ ۱۰۰۰ متری A تا C را طی می‌کند، متحرک کندتر مسافت d را از B تا C می‌پیماید، بنابراین می‌توان نوشت:

متحرک سریع‌تر: $\Delta x_۱ = v_۱ t \Rightarrow ۱۰۰۰ = v_۱ t$

متحرک کندتر: $\Delta x_۲ = v_۲ t \Rightarrow d = v_۲ t$

با تقسیم ۲ رابطهٔ بالا برهم داریم:

رابطهٔ (۱): $\frac{d}{۱۰۰۰} = \frac{v_۲}{v_۱}$

در ادامه متحرک سریع‌تر فاصلهٔ d را در مدت Δt طی می‌کند و متحرک کندتر فاصلهٔ ۱۰۰۰ متری را در مدت $۴\Delta t$ طی می‌کند و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{متحرک سریع‌تر}: d = v_۱ \Delta t \\ \text{متحرک کندتر}: ۱۰۰۰ = v_۲ \times ۴\Delta t \end{cases} \xrightarrow{\text{تقسیم رابطه‌ها}} \frac{۱۰۰۰}{d} = \frac{۴v_۲}{v_۱}$$

$$\xrightarrow{\text{رابطه (۱)}} \frac{۱۰۰۰}{d} = ۴ \times \frac{d}{۱۰۰۰}$$

$$\Rightarrow ۱۰^۶ = ۴d^۲ \Rightarrow ۱۰^۳ = ۲d \Rightarrow d = ۵۰۰m$$

بنابراین فاصلهٔ اولیهٔ دو متحرک ۱۵۰۰m بوده است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۵ اگر بزرگی شتاب متحرک B را a فرض کنیم، بزرگی شتاب نسبی دو متحرک ۵a خواهد بود. با درنظر گرفتن حرکت نسبی دو متحرک به شکل معکوس از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = ۴s$ خواهیم داشت:

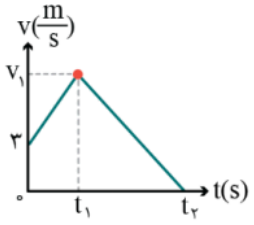
$$\Delta x_{\text{نسبی}} = \frac{۱}{۲}a_{\text{نسبی}}\Delta t^۲ + v_۰ \Delta t \Rightarrow ۱۴۴ + ۱۶ = \frac{۱}{۲} \times ۵a \times ۱۶ + ۰$$

$$\Rightarrow ۱۶۰ = \frac{۱}{۲} \times ۵a \times ۱۶ \Rightarrow ۱۰ = \frac{۱}{۲} \times ۵a \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۶۶ در بازهٔ صفر تا t_1، متحرک با شتاب ثابت حرکت می‌کند، پس سرعت متوسط برابر میانگین سرعت در ابتدا و انتهای این بازه است.



$$v_{av_{t_1\text{ تا }0}} = \frac{v_1 + 3}{2}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{v_1 + 3}{2} \Rightarrow v_1 = 9\frac{m}{s}$$

در بازهٔ t_1 تا t_2 نیز حرکت با شتاب ثابت انجام می‌شود و سرعت متوسط برابر میانگین سرعت در لحظه‌های t_1 و t_2 است، بنابراین داریم:

$$v_{av_{t_2\text{ تا }t_1}} = \frac{v_1 + 0}{2} = \frac{9+0}{2} = 4/5\frac{m}{s}$$

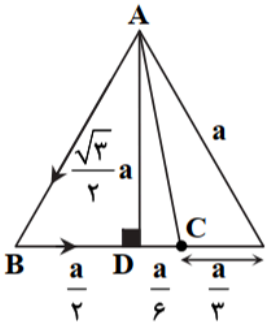
(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۷ اندازهٔ عمودمنصف AD برابر است با:

$$AD = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

فاصلهٔ AC را نیز با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آوریم:

$$AC = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2}a)^2 + (\frac{a}{6})^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}a$$



اندازهٔ جابه‌جایی متحرک، همان فاصلهٔ A تا C است:

$$|\vec{d}| = \frac{\sqrt{7}}{3}a$$

مسافت طی‌شده توسط متحرک برابر است با:

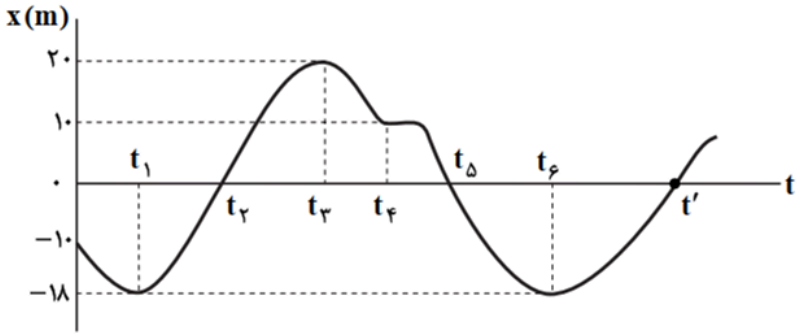
$$\ell = a + \frac{a}{2} + \frac{a}{6} = \frac{5}{3}a$$

حالا نسبت خواسته‌شده را می‌یابیم:

$$\frac{|\vec{d}|}{\ell} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{3}a}{\frac{5}{3}a} = 0/2\sqrt{7}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۸ در بازه‌های زمانی صفر تا t_1 و t_3 تا t_6 متحرک در خلاف محور x حرکت می‌کند، چون با گذشت زمان، مکان متحرک کاهش می‌یابد (می‌توان گفت شیب خط مماس بر نمودار منفی است؛ در نتیجه سرعت منفی است و سرعت منفی هم به این معنا است که متحرک در خلاف محور x جابه‌جا می‌شود.) متحرک در لحظه‌های t_1، t_3، t_4 و t_6 به حال سکون درمی‌آید. سومین بار که تندی متحرک صفر می‌شود، لحظهٔ t_4 است.

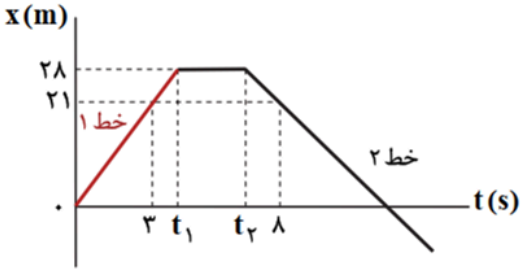


$$\ell = |[-18-(-10)]| + |-18-20| = 8+38 = 46\,m \qquad |\vec{d}| = 10-(-10) = 20\,m \qquad \ell - |\vec{d}| = 46-20 = 26\,m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۶۹ نمودار مکان- زمان در دو ناحیه به‌صورت یک خط راست شیب‌دار است؛ بنابراین حرکت متحرک با سرعت ثابت بوده و شیب این خط‌ها برابر با سرعت متحرک است:



$$\text{شیب خط} = v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{۲۱ - ۰}{۳ - ۰} = ۷\frac{m}{s}$$

$$۷ = \frac{۲۸ - ۰}{t_1 - ۰} \Rightarrow t_1 = ۴s$$

از تعریف شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow -۲/۴ = \frac{v_2 - ۷}{۸ - ۳} \Rightarrow v_2 = -۵\frac{m}{s}$$

$$-۵ = \frac{۲۱ - ۲۸}{۸ - t_2} \Rightarrow t_2 = ۶/۶s$$

متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 به حال سکون است، چون با گذشت زمان، مکان متحرک تغییر نمی‌کند.

$$\Delta t = t_2 - t_1 = ۶/۶ - ۴ = ۲/۶s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۰ شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان در هر لحظه، برابر با سرعت متحرک در آن لحظه است:

$$\text{شیب خط مماس} = v_{t=۱۰s} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow v_{t=۱۰s} = \frac{۴۰ - ۰}{۱۰ - ۰} = ۴\frac{m}{s}$$

سرعت متوسط متحرک بین دو نقطه در نمودار $x-t$، برابر با شیب خطی است که آن دو نقطه را به‌هم وصل می‌کند. چون شیب خط بین دو نقطهٔ $۱۰s$ و t' منفی است، v_{av} بین این دو نقطه نیز منفی خواهد بود.

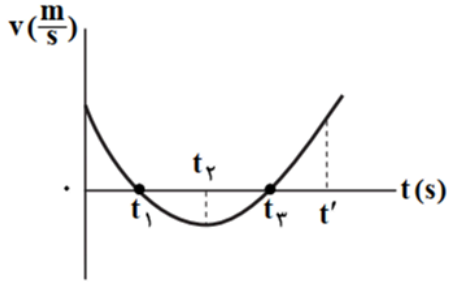
$$|v_{av}| = \frac{v}{۱/۲} = \frac{۴}{۱/۲} = \frac{۱۰}{۳}\frac{m}{s} \Rightarrow v_{av} = -\frac{۱۰}{۳}\frac{m}{s}$$

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow -\frac{۱۰}{۳} = \frac{۰ - ۴۰}{t' - ۱۰} \Rightarrow t' = ۲۲s$$

در بازهٔ زمانی $t = ۱۵s$ تا $t' = ۲۲s$ یعنی به‌مدت $۷s$ بردار مکان مثبت و بردار سرعت منفی است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۱



الف) نادرست؛ سرعت متحرک در لحظه‌های t_1 و t_3 تغییر جهت داده است؛ بنابراین متحرک در این دو لحظه تغییر جهت داده است.

ب) نادرست؛ در بازهٔ زمانی صفر تا t_2 شتاب منفی (شیب منفی است) و در خلاف جهت محور x است.

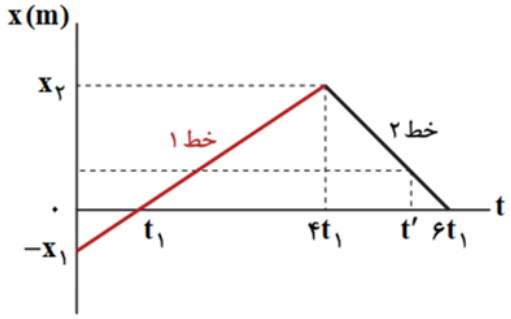
پ) نادرست؛ در لحظه‌های t_1 و t_3 سرعت متحرک صفر شده است.

ت) نادرست؛ سرعت متحرک در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 در خلاف جهت محور x است و در بازهٔ زمانی t_2 تا t_3 تندی کاهش یافته است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۷۲ شیب هریک از خط‌های (۱) و (۲)، نشان‌دهندهٔ سرعت متحرک در راستای محور x است:



$$\text{شیب خط (۱)} = \frac{۰-(-x_۱)}{t_۱} = \frac{x_۲-۰}{۴t_۱-t_۱} \Rightarrow x_۲ = ۳x_۱$$

$$\ell_۱ = x_۱ + ۳x_۱ + ۳x_۱ = ۷x_۱$$

$$|\vec{d}| = x_۱$$

$$۷x_۱ - x_۱ = ۶۰ \Rightarrow x_۱ = ۱۰\,m \;,\; x_۲ = ۳x_۱ = ۳۰\,m$$

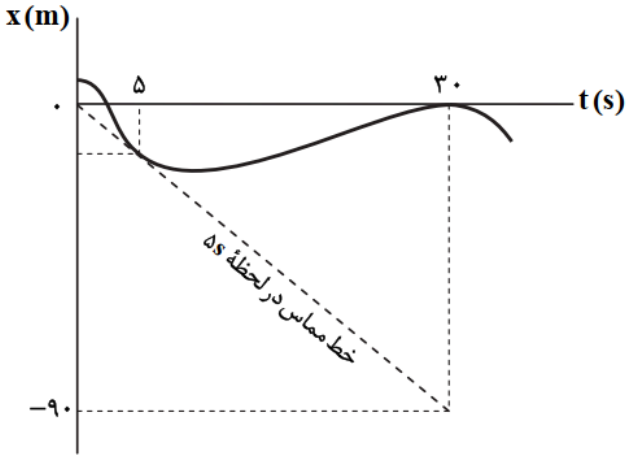
متحرک در بازهٔ زمانی $۴t_۱$ تا $۶t_۱$ با سرعت منفی در حرکت است:

$$\text{شیب خط (۲)} = \frac{۰-۳۰}{۶t_۱-۴t_۱} = -\frac{۱۵}{t_۱}$$

$$-\frac{۱۵}{t_۱} = \frac{۰-۹}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{۹}{۱۵}t_۱ \Rightarrow ۶t_۱ - t' = \frac{۹}{۱۵}t_۱ \Rightarrow t' = ۵/۴t_۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۳ شیب خط مماس در یک لحظه در نمودار $x-t$، برابر با سرعت متحرک در آن لحظه است:



$$\text{شیب خط مماس} = \frac{-۹۰-۰}{۳۰-۰} = -۳\frac{m}{s} \Rightarrow v_{t=۵s} = -۳\frac{m}{s}$$

چون شیب خط مماس در لحظهٔ $t = ۳۰s$ صفر است؛ بنابراین $v_{t=۳۰s} = ۰$ است.

از تعریف سرعت متوسط داریم:

$$-۳ = \frac{x-۰}{۵-۰} \Rightarrow x = -۱۵\,m$$

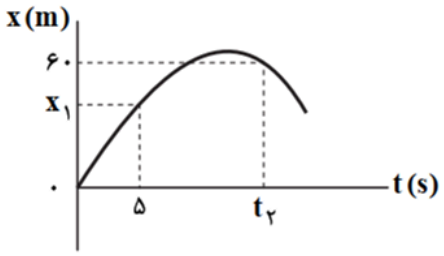
$$v_{av} = \frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱} \Rightarrow v_{av} = \frac{۰-(-۱۵)}{۳۰-۵} = ۰/۶\frac{m}{s}$$

از تعریف شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱} \Rightarrow a_{av} = \frac{۰-(-۳)}{۳۰-۵} = ۰/۱۲\frac{m}{s^۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۴



$$v_{av(۰-۵)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۸ = \frac{x_۱-۰}{۵-۰} \Rightarrow x_۱ = ۴۰\,m$$

$$v_{av(۵-t_۲)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow ۲ = \frac{۶۰-۴۰}{t_۲-۵} \Rightarrow t_۲ - ۵ = ۱۰ \Rightarrow t_۲ = ۱۵s$$

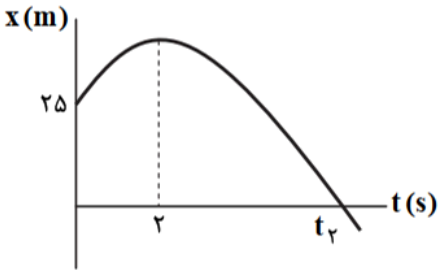
$$v_{av(۰-t_۲)} = \frac{۶۰}{۱۵} = ۴\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۷۵ یکی از راه‌حل‌های این تست رسم نمودار معادلهٔ درجهٔ دوم است و می‌توان از درس ریاضی کمک گرفت.

- رأس سهمی: $t = -\frac{B}{2A} = -\frac{20}{2(-5)} = 2s$
- متحرک در $t = 0s$ از $x_0 = +25m$ عبور می‌کند و نمودار مکان- زمان آن به‌صورت روبه‌رو است.
- با توجه به نمودار متحرک در بازهٔ زمانی $2s$ تا t_2 به مبدأ مکان نزدیک می‌شود و اما لحظهٔ t_2 لحظه‌ای است که $x = 0$ باشد.



$$0 = -5t^2 + 20t + 25 \Rightarrow t = \begin{cases} -1s & \text{غ‌ق‌ق} \\ 5s & \text{ق‌ق} \end{cases}$$

به این ترتیب متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 5s$ به مبدأ مکان نزدیک می‌شود.

$$t_1 = 2s \Rightarrow x_1 = -5(2)^2 + 20(2) + 25 = 45m$$

$$t_2 = 5s \Rightarrow x_2 = -5(5)^2 + 20(5) + 25 = 0$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 45}{5 - 2} = -15\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۶ ابتدا لحظه‌های عبور از مبدأ مکان را پیدا می‌کنیم. برای این منظور x را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$(t+2)(2t^2 - 8t + 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t + 2 = 0 \Rightarrow t = -2s & \text{غ‌ق‌ق} \\ 2t^2 - 8t + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s & \text{ق‌ق} \\ t_2 = 3s & \text{ق‌ق} \end{cases} \end{cases}$$

حالا سرعت متحرک را در لحظات t_1 و t_2 به‌دست می‌آوریم:

$$t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = 6(1)^2 - 8(1) - 10 = -12\frac{m}{s}$$

$$t_2 = 3s \Rightarrow v_2 = 6(3)^2 - 8(3) - 10 = 20\frac{m}{s}$$

در آخر با استفاده از تعریف شتاب متوسط داریم:

$$a_{av} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow a_{av} = \frac{20 - (-12)}{3 - 1} = \frac{32\frac{m}{s}}{2s} = 16\frac{m}{s^2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۷

- در بازهٔ $t = 0s$ تا $t = 2s$، متحرک با سرعت ثابت $v = \frac{30}{2} = 15\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند.
- در بازهٔ $t = 2s$ تا $t = 6s$، مکان متحرک ثابت مانده است و در این بازه سرعت متحرک صفر است.
- در بازهٔ $t = 6s$ تا $t = 10s$، متحرک با سرعت ثابت $v = -\frac{30}{4} = -7/5\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند.
- در بازهٔ $t = 10s$ تا $t = 16s$، متحرک با سرعت ثابت $v = -\frac{8}{4} = -2\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۷۸ گزینهٔ ۱: برای تغییر جهت سرعت باید شتاب در خلاف جهت آن باشد تا تندی جسم کم شود و سرانجام بایستد. حال اگر جهت شتاب در این لحظه تغییر نکند، جهت سرعت تغییر کرده و جسم در خلاف جهت حرکت قبلی به راه می‌افتد. به این ترتیب سرعت تغییر جهت داده ولی شتاب تغییر جهت نداده است. حال اگر درست در لحظه‌ای که جسم ساکن می‌شود، شتاب تغییر جهت دهد، جسم در جهت شتاب جدید که همان جهت سرعت قدیم بوده به راه می‌افتد. به این ترتیب شتاب تغییر جهت داده ولی سرعت تغییر جهت نداده است. ازاین‌رو هیچ‌گاه ممکن نیست $\vec{a}$ و $\vec{v}$ هر دو به‌طور هم‌زمان تغییر جهت دهند. (درست)

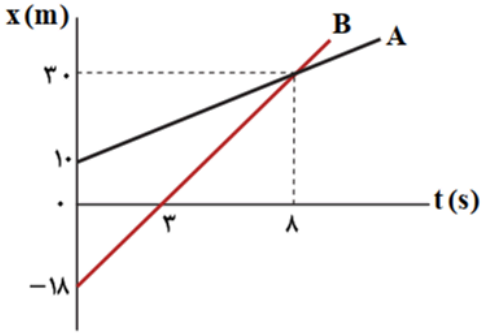
گزینهٔ ۲: چنانچه سرعت و شتاب هم‌جهت باشند، با وجود آنکه بزرگی شتاب کم می‌شود ولی بزرگی سرعت زیاد می‌شود. (نادرست)

گزینهٔ ۳: هنگامی که $\vec{v}$ و $\vec{a}$ خلاف جهت هم‌اند، تندی جسم کاهش می‌یابد تا بالاخره می‌ایستد. اکنون اگر جهت شتاب هم‌چنان مثبت بماند، جسم به‌طرف مبدأ مکان به راه می‌افتد و به مبدأ نزدیک می‌شود ولی در همان لحظهٔ اولیه چون $v<0$ است و متحرک هم در مکان‌های منفی است، برای مدتی تا قبل از توقف متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود. (نادرست)

گزینهٔ ۴: اگر متحرک با $v>0$ (در جهت محور x) در ناحیهٔ $x>0$ باشد، با توجه به اینکه $a<0$ است، به‌طور کندشونده از مبدأ مکان دور می‌شود تا اینکه متوقف شده و سپس به‌سمت مبدأ مکان بازمی‌گردد و از آن عبور می‌کند. (نادرست)

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۷۹ شیب خط در نمودار $x-t$ با سرعت ثابت، بیانگر سرعت متحرک است:



$$\text{شیب خط } B = \frac{0-(-18)}{3-0} = 6 = \frac{x_2-0}{8-3} \Rightarrow x_2 = 30\,m$$

$$v_B = 6\frac{m}{s}\ ,\ v_A = \frac{30-10}{8} = 2/5\frac{m}{s}$$

معادلهٔ مکان- زمان هر دو متحرک را می‌نویسیم. هنگامی که فاصلهٔ دو متحرک $31/5\,m$ است، یعنی $x_B - x_A = 31/5$ است:

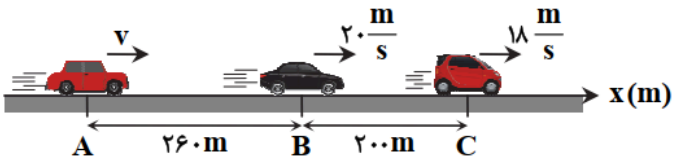
$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = 2/5t + 10 \\ x_B = 6t - 18 \end{cases} \Rightarrow x_B - x_A = 6t - 18 - 2/5t - 10$$

$$\Rightarrow 31/5 = 3/5t - 28 \Rightarrow t = 17\,s$$

$$x_A = 2/5 \times 17 + 10 = 52/5\,m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۰ فرض می‌کنیم در لحظهٔ t_0 خودروی A در $x=0$ قرار دارد.



به این ترتیب معادلهٔ سه خودرو به‌صورت زیر است:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = vt \\ x_B = 20t + 260 \\ x_C = 18t + 460 \end{cases} \Rightarrow x_B = x_C \Rightarrow 20t + 260 = 18t + 460 \Rightarrow 2t = 200 \Rightarrow t = 100\,s$$

۲۰ ثانیه بعد به‌هم رسیدن دو خودروی B و C، یعنی در لحظهٔ $t = 120\,s$ داریم:

$$\begin{cases} x_B = 20\times 120 + 260 = 2660\,m \\ x_C = 18\times 120 + 460 = 2620\,m \end{cases} \Rightarrow \text{مکان وسط آن‌ها (مکان خودروی A)} = \frac{2660+2620}{2} = 2640\,m$$

$$x_A = v\times 120 \Rightarrow 2640 = v\times 120 \Rightarrow v = 22\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۱ برای آنکه فاصلهٔ آن‌ها همواره ثابت بماند، باید تندی دو خودرو برابر باشد.

$$v_A = \frac{0-30}{5-0} = -6\frac{m}{s} \Rightarrow v_B = -6\frac{m}{s}$$

$$x_{0B} = 18+30 = 48\,m$$

$$0 = -6t_1 + 48 \Rightarrow t_1 = 8\,s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۲ چنانچه رانندهٔ اتومبیل با تندی v براند، پس از مدت t مسافت دو شهر که ℓ است را پیموده و سر وقت می‌رسد:

$$\ell = vt \Rightarrow \begin{cases} \ell = 90(t-\frac{40}{60}) \\ \ell = 60(t+\frac{40}{60}) \end{cases} \Rightarrow 90(t-\frac{40}{60}) = 60(t+\frac{40}{60}) \Rightarrow t = \frac{10}{3}h$$

$$\ell = 90(\frac{10}{3}-\frac{40}{60}) = 240\,km$$

$$v = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{240}{\frac{10}{3}} = 72\frac{km}{h}$$

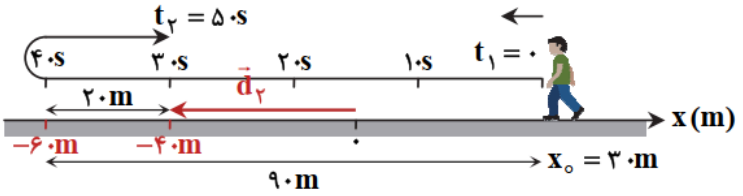
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۳ کل مسافتی که شخص پیموده است، برابر است با:

$$L = 90+20 = 110\,m$$

حالا تندی متوسط او را می‌یابیم:

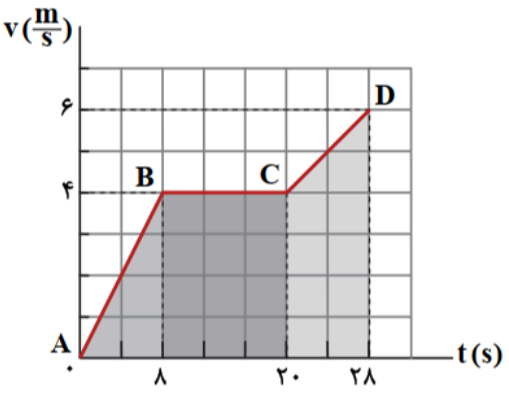
$$s_{av} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{110\,m}{50\,s} = 2/2\frac{m}{s}$$



بردار مکان متحرک، برداری است که مبدأ مکان ($x=0$) را به مکان متحرک در هر لحظه وصل می‌کند؛ بنابراین مطابق آنچه که در شکل نشان داده شده، بردار مکان شخص در لحظهٔ t_2 برابر با $\vec{d}_2 = (-40\,m)\vec{i}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۴ مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است.



$$\Delta x_{(0-8)} = \frac{4\times 8}{2} = 16\,m$$

$$\Delta x_{(8-20)} = 4\times 12 = 48\,m$$

$$\Delta x_{(20-28)} = \frac{4+6}{2}\times 8 = 40\,m$$

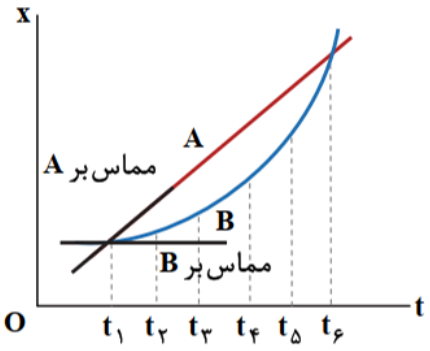
$$\Delta x_{(0-28)} = 16+48+40 = 104\,m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x_{(0-28)}}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{104\,m}{28\,s} = \frac{26}{7}\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

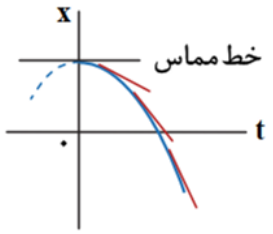
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۸۵ لحظهٔ t_1 اولین لحظه‌ای است که دو خودرو به‌هم می‌رسند (نمودار مکان- زمان یکدیگر را قطع کرده‌اند). شیب خط مماس بر نمودار A بیشتر از شیب خط مماس بر نمودار B است. از این‌رو تندی خودروی A بیشتر است. از لحظهٔ t_1 به‌بعد تندی خودروی A ثابت ولی تندی خودروی B رفته‌رفته زیاد می‌شود (شیب خط مماس زیاد می‌شود) و تا لحظهٔ t_4 فاصلهٔ دو متحرک از هم زیاد می‌شود چون تا این لحظه تندی خودروی A که در جلو است بیشتر از تندی خودروی B است که در پشت سر A قرار دارد. در لحظهٔ t_4 تندی دو خودرو برابر و فاصلهٔ دو خودرو به بیشترین مقدار ممکن می‌رسد و از لحظهٔ t_4 تا لحظهٔ t_6 فاصلهٔ دو خودرو کم می‌شود چون تندی خودروی B در پشت سر بزرگ‌تر از تندی خودروی A در جلو می‌شود.



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۶ برای آنکه از حال سکون شروع به حرکت نماید، باید در $t=0$ تندی متحرک صفر باشد. برای این منظور باید شیب خط مماس در $t=0$ موازی محور زمان باشد (شیب صفر باشد). همچنین برای حرکت در خلاف محور x باید رفته‌رفته x کم شود و برای افزایش تندی باید رفته‌رفته شیب خط مماس زیاد شود.



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۷ در بازهٔ زمانی صفر تا ۸s داریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow 0=\frac{1}{2}a\times 8^2+v_0\times 8 \Rightarrow v_0=-4a$$

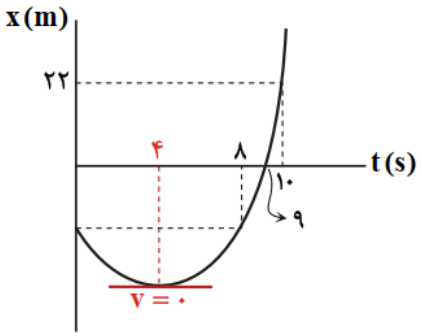
برای بازهٔ صفر تا ۹s می‌توان نوشت:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v_{(9s)}=a\times 9+v_0=9a-4a=5a$$

در بازهٔ ۹s تا ۱۰s داریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_{(9s)}t \Rightarrow 22=\frac{1}{2}a\times 1^2+5a\times 1 \Rightarrow a=4\frac{m}{s^2}$$

$$v_0=-4a=-4(4) \Rightarrow v_0=-16\frac{m}{s}$$



حالا برای بازهٔ صفر تا ۱۰s می‌نویسیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow 22-x_0=\frac{1}{2}\times 4\times 10^2-16\times 10 \Rightarrow x_0=-18\,m$$

در نهایت معادلهٔ مکان- زمان را می‌نویسیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}(4)t^2+(-16)t+(-18) \Rightarrow x=2t^2-16t-18$$

توجه: با جای‌گذاری نقاط مشخص از نمودار مانند (۹,۰) در گزینه‌ها، راحت‌تر می‌توان به جواب رسید. گاهی اوقات در عین دشواری سؤال کنکور، با جای‌گذاری، همه‌چیز آسان می‌شود.

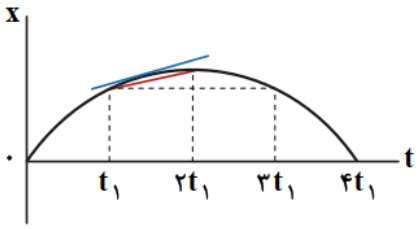
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

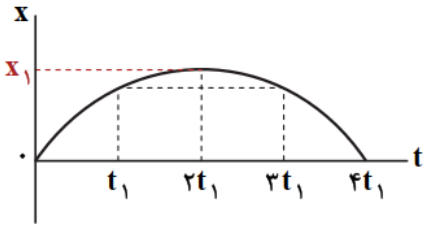
۸۸ الف) شیب خط واصل از صفر تا t_1 (سرعت متوسط بازهٔ صفر تا t_1) از شیب خط مماس در لحظهٔ t_1 (سرعت لحظهٔ t_1) بیشتر است. (درست)

ب) جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $3t_1$ با جابه‌جایی آن در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 برابر است ولی بازهٔ زمانی آن ۳ برابر بازهٔ زمانی صفر تا t_1 است؛ به این ترتیب سرعت متوسط بازهٔ صفر تا t_1 سه برابر سرعت متوسط بازهٔ زمانی صفر تا $3t_1$ است. (درست)

پ) همان‌طور که در شکل روبه‌رو دیده می‌شود لحظه‌ای یافت می‌شود که شیب خط مماس آن با شیب خط واصل بازهٔ t_1 تا $2t_1$ برابر است. (درست)



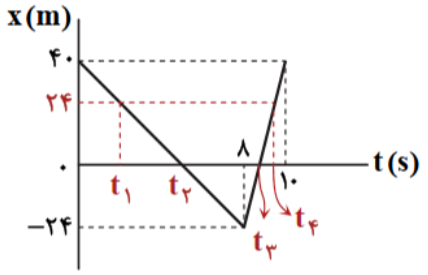
ت)



$$\begin{cases} s_{av}=\dfrac{L}{\Delta t} \Rightarrow s_{av}=\dfrac{x_1+x_1}{4t_1}=\dfrac{2x_1}{4t_1}=\dfrac{x_1}{2t_1} \\ v_{av}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{-x_1}{2t_1} \end{cases} \Rightarrow s_{av}=|v_{av}| \quad \text{(درست)}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۹ در بازه‌های زمانی t_4 تا ۱۰s , (۰ تا t_1) فاصلهٔ متحرک تا $x=0$ بیشتر از $24m$ است.



$$(1)\ \text{شیب خط}=\frac{-24-40}{8-0}=-8\frac{m}{s} \Rightarrow -8=\frac{24-40}{t_1-0} \Rightarrow t_1=2s$$

$$(2)\ \text{شیب خط}=\frac{40-(-24)}{10-8}=32\frac{m}{s} \Rightarrow 32=\frac{40-24}{10-t_4} \Rightarrow t_4=9/5s$$

$$\begin{cases} t_1-0=2s \\ 10-t_4=10-9/5=0/5s \end{cases} \Rightarrow 2+0/5=2/5s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۰ الف) خط واصل دو لحظهٔ ۴s و ۵s همان خط مماس در لحظهٔ ۹s است، پس سرعت متوسط بازهٔ ۴s تا ۵s با سرعت لحظهٔ ۹s برابر است. (درست)

ب) شیب خط مماس در لحظهٔ ۶s برابر $5\frac{m}{s}$ ($\text{شیب}=\frac{20m}{9-5}=5\frac{m}{s}$) است، پس سرعت لحظهٔ $t=6s$ برابر $5\frac{m}{s}$ است. (نادرست)

پ) با توجه به نمودار جهت حرکت سه بار و جهت بردار مکان یک بار تغییر کرده است. (درست)

ت) چون شیب دو خط مماس برابر است، پس شیب خط مماس در لحظهٔ ۹s هم $5\frac{m}{s}$ است. از طرفی در بازهٔ زمانی ۴s تا ۵s می‌توان خط مماس رسم نمود که شیب آن با شیب خط‌های مماس برابر باشد؛ ضمن آنکه می‌دانیم شیب هر دو خط مماس برابر $5\frac{m}{s}$ است. (درست)

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

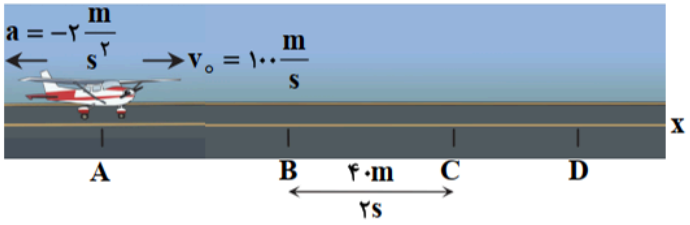
۹۱ $$\text{شیب خط مماس}=\frac{0-45}{15-0}=-3\frac{m}{s}$$

شیب خط مماس بر نمودار برابر سرعت در لحظهٔ $t=0$ است. از طرفی چنانچه در بازهٔ زمانی صفر تا ۵s مماس‌هایی بر نمودار رسم کنیم خواهیم دید که بزرگی شیب خط‌های مماس رفته‌رفته زیاد می‌شود، پس تندی متحرک زیاد می‌شود. در لحظهٔ $t=0$ تندی آن $3\frac{m}{s}$ است، پس در لحظهٔ ۵s تندی متحرک به $8\frac{m}{s}$ $(3+5=8)$ می‌رسد. از طرفی سرعت متحرک که منفی است برابر با $-8\frac{m}{s}$ خواهد بود.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۲ جهت حرکت را در جهت محور x فرض می‌کنیم. در فاصلهٔ BC داریم:



$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow ۴۰=\frac{۱}{۲}(-۲)\times ۲^۲+v_B\times ۲$$

$$\Rightarrow v_B=۲۲\frac{m}{s}$$

$$v_C=at+v_B \Rightarrow v_C=-۲\times ۲+۲۲=۱۸\frac{m}{s}$$

$$v_C=at+v_A$$

$$۱۸=-۲t+۱۰۰ \Rightarrow t=۴۱s$$

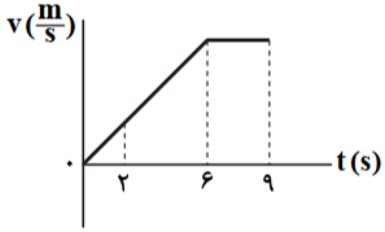
توجه: $۳۶۰\frac{km}{h}$ برابر با $۱۰۰\frac{m}{s}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۳

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t$$

در بازهٔ صفر تا ۲s داریم:



$$\Delta x=\frac{۱}{۲}a\times ۲^۲+۰=۲a$$

برای بازهٔ صفر تا ۶s می‌توان نوشت:

$$۲a+۴۰=\frac{۱}{۲}a\times ۶^۲+۰ \Rightarrow a=۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

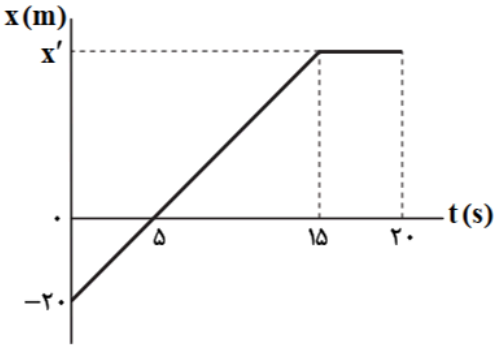
$$v=at+v_۰ \Rightarrow v=۲/۵\times ۶=۱۵\frac{m}{s}$$

جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا ۹s برابر با مساحت زیر نمودار $v-t$ در این بازهٔ زمانی است:

$$\Delta x=S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{(۳+۹)\times ۱۵}{۲}=۹۰m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۴



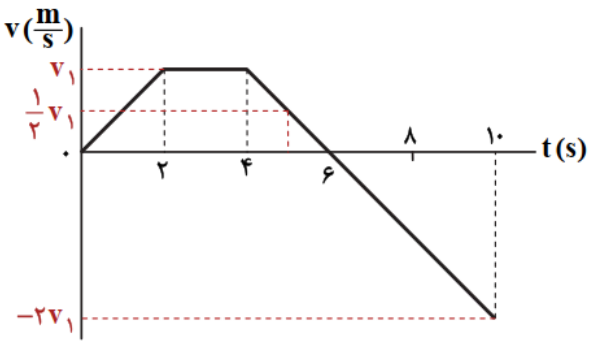
$$\text{شیب خط}=\frac{۰-(-۲۰)}{۵-۰}=۴\frac{m}{s} \Rightarrow ۴=\frac{x'-۰}{۱۵-۵} \Rightarrow x'=۴۰m$$

$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t} \Rightarrow s_{av}=\frac{۴۰+۲۰}{۲۰}=۳\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۵ مساحت محصور بین نمودار $v-t$ با محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است:



$$\Delta x_{۶s\,تا\,۰}=\frac{۲+۶}{۲}\times v_۱=۴v_۱\quad,\quad \Delta x_{۱۰s\,تا\,۶s}=\frac{-۲v_۱\times ۴}{۲}=-۴v_۱$$

مسافت طی‌شده در کل ۱۱۰ ثانیه برابر است با:

$$L=۴v_۱+\left|-۴v_۱\right|=۸v_۱$$

$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}\Rightarrow ۱۶=\frac{۸v_۱}{۱۰-۰}\Rightarrow v_۱=۲۰\frac{m}{s}$$

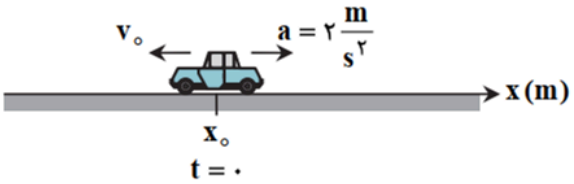
شیب خط در بازهٔ زمانی $۴s$ تا $۱۰s$ ثابت و برابر است با:

$$\text{شیب خط}=\frac{۰-۲۰}{۶-۴}=-۱۰\frac{m}{s^۲}$$

با توجه به اینکه بازهٔ زمانی $۵s$ تا $۱۰s$ نیز زیرمجموعهٔ بازهٔ $۴s$ تا $۱۰s$ است؛ پس شیب خط بین این دو لحظه (شتاب متوسط) نیز برابر با $-۱۰\frac{m}{s^۲}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۶ حرکت در $t=۰s$ کندشونده است. با توجه به اینکه شتاب مثبت است، پس باید $v_۰$ منفی باشد یعنی متحرک در بازهٔ صفر تا $۴s$ در خلاف محور x حرکت می‌کند و پس از آن که به‌طور لحظه‌ای ساکن می‌شود، به‌طور تندشونده و در جهت شتاب یعنی جهت محور x به راه می‌افتد و به‌مدت $۶s$ به‌صورت تندشونده ادامه می‌دهد.



$$\begin{cases}t=۴s\\v=۰\end{cases}\Rightarrow v=at+v_۰\Rightarrow ۰=۲\times ۴+v_۰\Rightarrow v_۰=-۸\frac{m}{s}$$

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow \Delta x=\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۱۰^۲+(-۸)\times ۱۰=+۲۰m$$

$$x-x_۰=۲۰\Rightarrow ۲۷-x_۰=۲۰\Rightarrow x_۰=۷m$$

می‌توان معادلهٔ مکان- زمان متحرک را نوشت:

$$x=\frac{۱}{۲}\times ۲t^۲-۸t+۷\Rightarrow x=t^۲-۸t+۷$$

لحظه‌هایی که متحرک از $x=۰$ عبور می‌کند، برابر است با:

$$t^۲-۸t+۷=۰\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۱s\\t_۲=۷s\end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۹۷ فرض می‌کنیم خودرو در جهت محور x در حرکت بوده است. به این ترتیب جابه‌جایی آن تا توقف برابر است با:

$$\Delta x=۴۷/۵-۲/۵=۴۵m$$

$$\Delta x=\frac{v+v_۰}{۲}t\Rightarrow ۴۵=\frac{۰+۱۵}{۲}t\Rightarrow t=۶s$$

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=a\times ۶+۱۵\Rightarrow a=-\frac{۱۵}{۶}=-۲/۵\frac{m}{s^۲}\Rightarrow |a|=۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۹۸

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x = 5t^2 - 40t + 30 \end{cases}$$

چون $v_0 = -40\frac{m}{s}$ و $a = 10\frac{m}{s^2}$ است تا وقتی که تندی متحرک به صفر می‌رسد، حرکت متحرک کندشونده است.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - (-40)^2 = 2\times 10\times \Delta x \Rightarrow \Delta x = -80\,m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۹

$$v_{av} = \frac{v + v_0}{2} \Rightarrow 50 = \frac{v + 0}{2} \Rightarrow v = 100\frac{m}{s}$$

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 100^2 - 0 = 2\times 2/5\times \Delta x \Rightarrow \Delta x = 2000\,m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۰

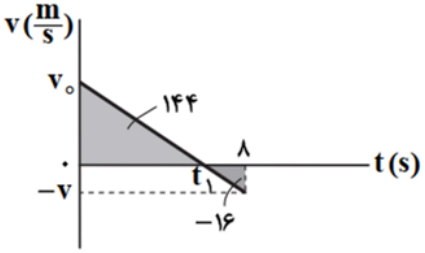
در گزینه‌های ۱، ۳ و ۴ همهٔ مختصات در معادلهٔ سرعت به‌درستی صدق نمی‌کنند. در گزینهٔ ۲ در بازهٔ زمانی $3\,s$ تغییر سرعت برابر $\Delta v = 1/5\times 3 = 4/5\frac{m}{s}$ است و همچنین در لحظهٔ $t = 1s$ سرعت متحرک $-6\frac{m}{s}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۰۱



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a=\frac{0-v_0}{t_1}=-\frac{v_0}{t_1}$$

تشابه دو مثلث قائم‌الزاویه: $\frac{v}{v_0}=\frac{8-t_1}{t_1}\Rightarrow v=(\frac{8-t_1}{t_1})v_0$

مساحت زیر نمودار سرعت- زمان برابر جابه‌جایی است.

$$\begin{cases}144=\frac{v_0\times t_1}{2} & (1)\\ -16=\frac{-v_0(8-t_1)^2}{2t_1} & (2)\end{cases}\xrightarrow{(1),(2)}9=\frac{t_1^2}{(8-t_1)^2}\Rightarrow 3=\frac{t_1}{8-t_1}\Rightarrow t_1=6s$$

حالا مقدار v_0 و a را به‌دست می‌آوریم:

$$144=\frac{6\times v_0}{2}\Rightarrow v_0=48\frac{m}{s}\qquad a=-\frac{48}{6}=-8\frac{m}{s^2}$$

معادلهٔ مکان- زمان حرکت با شتاب ثابت به‌صورت زیر است:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow x=\frac{1}{2}(-8)t^2+48t+x_0\xrightarrow[x=0]{t=2s}0=\frac{1}{2}(-8)\times2^2+48\times2+x_0\Rightarrow x_0=-80m$$

$$x=\frac{1}{2}(-8)t^2+48t-80\Rightarrow x=-4t^2+48t-80$$

راه‌حل سریع‌تر:

با توجه به دو مثلث متشابه، نسبت مساحت آن‌ها برابر با نسبت مربع اضلاع آن‌ها است.

$$\frac{144}{16}=(\frac{t_1}{8-t_1})^2\Rightarrow t_1=6s\Rightarrow\frac{v_0\times6}{2}=144\Rightarrow v_0=48\frac{m}{s}$$

$$a=\frac{-v_0}{t_1}=\frac{-48}{6}=-8\frac{m}{s^2}\Rightarrow x=-4t^2+48t-80$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۲

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow -13/5-4/5=\frac{1}{2}a\times4^2+0\times4\Rightarrow a=-\frac{9}{4}\frac{m}{s^2}$$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow v^2-0=2\times(-\frac{9}{4})\times(0-4/5)\Rightarrow v=\pm4/5\frac{m}{s}$$

با توجه به اینکه شیب خط مماس در $x=0$ منفی است، پاسخ منفی برای سرعت قابل‌قبول است: $v=-4/5\frac{m}{s}$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۳

جهت حرکت را جهت محور x فرض می‌کنیم.

$$v_2=\frac{72}{3/6}=20\frac{m}{s}\qquad v_1=\frac{28/8}{3/6}=8\frac{m}{s}$$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x\Rightarrow 20^2-8^2=2a\times56\Rightarrow a=3\frac{m}{s^2}$$

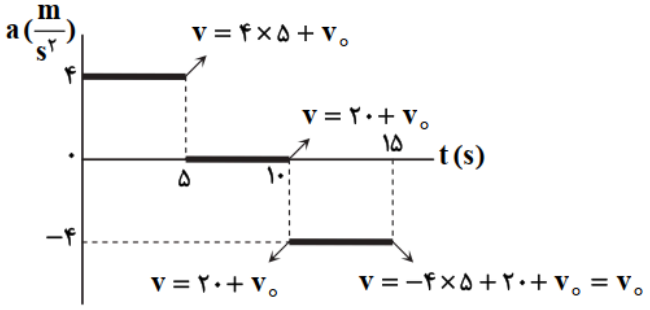
حالا با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v=at+v_0\Rightarrow 8=3\times t+0\Rightarrow t=\frac{8}{3}s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۰۴ فرض می‌کنیم سرعت اولیهٔ متحرک v_0 باشد. با توجه به رابطهٔ $v = at + v_0$ سرعت متحرک را روی شکل در پایان هر مدت می‌نویسیم.



$$\begin{cases} \Delta x_{(0-5)} = \frac{1}{2}\times 4\times 5^2 + v_0\times 5 \\ \Delta x_{(5-10)} = vt = (20+v_0)\times 5 \\ \Delta x_{(10-15)} = \frac{1}{2}(-4)\times 5^2 + (20+v_0)\times 5 \end{cases}$$

$$\Delta x_{(0-5)} + \Delta x_{(5-10)} + \Delta x_{(10-15)} = 125$$

$$\Rightarrow (50+5v_0)+(100+5v_0)+(-50+100+5v_0) = 125\,m$$

$$\Rightarrow v_0 = -5\frac{m}{s}$$

$$v_{(t=5s)} = 4\times 5 + (-5) = 15\frac{m}{s}$$

$$v_{(t=10s)} = 15\frac{m}{s}$$

در لحظهٔ $t = 0$ سرعت اولیه منفی ولی شتاب مثبت است؛ به این ترتیب حرکت کندشونده است تا لحظه‌ای که سرعت به صفر برسد.

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 4t - 5 \Rightarrow t = 1/25\,s$$

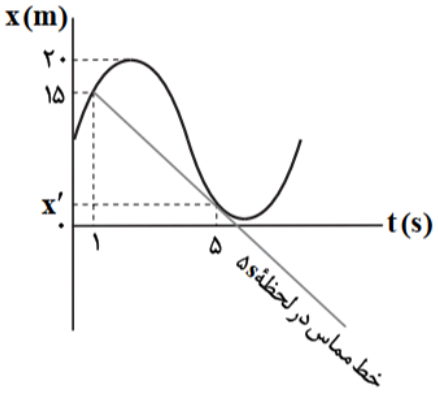
در لحظهٔ $t = 10s$، $v = 15\frac{m}{s}$ ولی شتاب منفی است، پس تا لحظه‌ای که سرعت به صفر برسد، حرکت کندشونده است:

$$0 = -4t + 15 \Rightarrow t = 3/75\,s$$

به این ترتیب در کل، متحرک به‌مدت $3/75 + 1/25 = 5\,s$ حرکت کندشونده داشته است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۵



مسافت طی‌شده: $\ell = (20-15)+(20-x') = 25-x'$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow 5/5 = \frac{25-x'}{5-1} \Rightarrow x' = 3m$$

$$\text{شیب خط مماس} = \frac{3-15}{5-1} = -3\frac{m}{s}$$

$$v_{(t=5s)} = -3\frac{m}{s} \Rightarrow \left|v_{(t=5s)}\right| = 3\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۰۶

$$a_{av}=\frac{0-v_0}{8}=-2/5 \Rightarrow v_0=20\frac{m}{s}$$

مساحت محصور بین نمودار $v-t$ و محور زمان برابر با جابه‌جایی متحرک است.

$$\text{مساحت}=\Delta x=\frac{t'+8}{2}\times v_0=130m \Rightarrow \frac{t'+8}{2}\times 20=130 \Rightarrow t'=5s$$

شتاب متحرک در بازهٔ زمانی $5s$ تا $8s$ ثابت است، از این‌رو شتاب هر لحظه در این بازه با شتاب متوسط این بازه برابر است، پس کافی است شتاب متوسط این بازه را حساب کنیم:

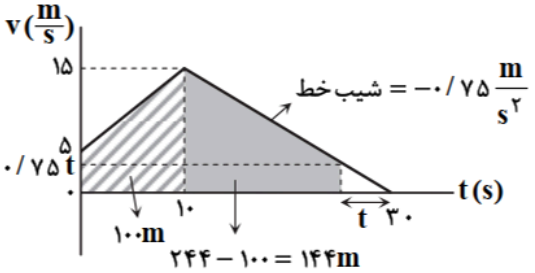
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av}=\frac{0-20}{8-5}=-\frac{20}{3}\frac{m}{s^2} \Rightarrow a_{(t=5/3s)}=-\frac{20}{3}\frac{m}{s^2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۷

ابتدا باید لحظهٔ عبور از مبدأ مکان را بیابیم. برای این منظور باید جابه‌جایی متحرک برابر با $244m$ شود و باید مساحتی برابر با $244m$ را از نمودار $v-t$ جدا کنیم.





$$\Delta x_{(0\to 10)}=\frac{5+15}{2}\times 10=100m$$

$$S_{\text{رنگی}}=244-100=144m$$

$$144=\frac{15+0/75t}{2}\times(20-t) \Rightarrow t=4s$$

$$v=0/75\times 4=3\frac{m}{s}$$

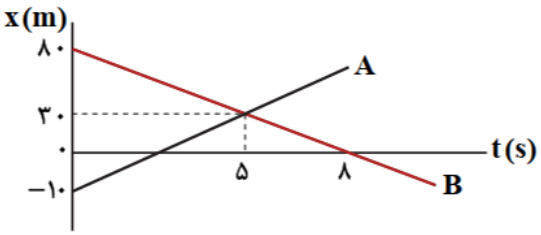
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۰۸

معادلهٔ $x=8t-10$ مربوط به متحرک A است، چون سرعت آن مثبت و مکان اولیهٔ آن منفی است.

$$x=8t-10 \xrightarrow{t=5s} x=8\times 5-10=30m$$

برای متحرک B داریم:



$$v_B=\frac{0-30}{8-5}=-10\frac{m}{s}$$

$$-10=\frac{0-x_{0B}}{8-0} \Rightarrow x_{0B}=80m$$

$$x_B=v_Bt+x_{0B} \Rightarrow x_B=-10t+80$$

در مبدأ زمان فاصلهٔ دو متحرک $90m$ است $(80-(-10)=90)$؛ از این‌رو پس از لحظهٔ به‌هم رسیدن، فاصلهٔ آن‌ها به $108m$ خواهد رسید.

$$x_A-x_B=108 \Rightarrow 8t-10-(-10t+80)=108 \Rightarrow t=11s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

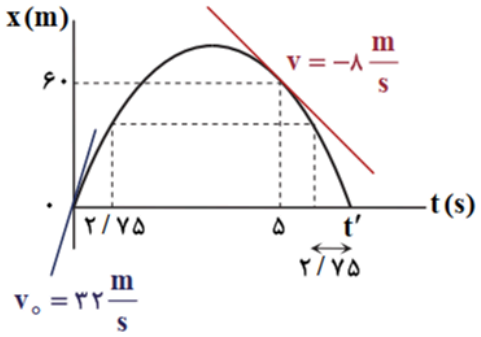
۱۰۹

$$\begin{cases}\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\\ v=at+v_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}60=\frac{1}{2}a\times5^2+v_0\times5\\ -8=a\times5+v_0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-8\frac{m}{s^2}\\ v_0=32\frac{m}{s}\end{cases}$$

$$v=at+v_0\Rightarrow 10=-8t+32\Rightarrow t=2/75s$$

با توجه به تقارن سهمی داریم:

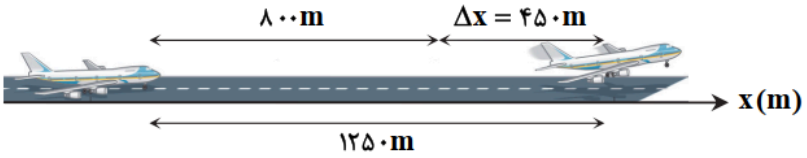
$$\Delta t=2/75\times2=5/5s$$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۱۰

جهت محور x را جهت حرکت هواپیما در نظر می‌گیریم.



کل زمان حرکت هواپیما روی باند را t فرض می‌کنیم. چون زمان حرکت ۴۵۰m آخر ۵s است، در نتیجه زمان پیمودن ۸۰۰m اول (۱۲۵۰ − ۴۵۰ = ۸۰۰m) برابر t − ۵ است و داریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\Rightarrow\begin{cases}1250=\frac{1}{2}at^2+0\\ 800=\frac{1}{2}a(t-5)^2+0\end{cases}\Rightarrow\frac{1250}{800}=\frac{\frac{1}{2}at^2}{\frac{1}{2}a(t-5)^2}\Rightarrow\frac{t}{t-5}=\frac{5}{4}\Rightarrow\begin{cases}t=25s\\ a=4\frac{m}{s^2}\end{cases}$$

$$v=at+v_0\Rightarrow v=4\times25=100\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

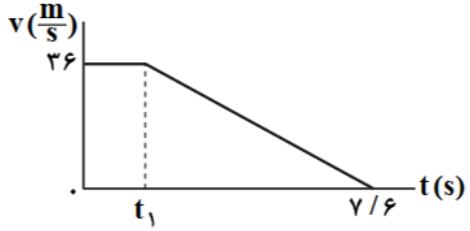
۱۱۱

در مدت‌زمان واکنش راننده، خودرو با همان تندی اولیه به حرکت خود ادامه می‌دهد. نمودار v − t متحرک به‌صورت روبه‌رو است که سطح زیر آن برابر با جابه‌جایی متحرک است.

$$144=\frac{t_1+7/6}{2}\times36\Rightarrow\text{زمان واکنش}: t_1=0/4s$$

$$\text{زمان حرکت شتاب‌دار}: \Delta t=7/6-0/4=7/2s$$

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-36}{7/2}=-5\frac{m}{s^2}\Rightarrow|a|=5\frac{m}{s^2}$$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۲

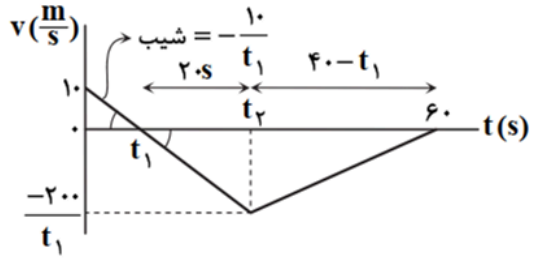
در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 و t_2 تا 60s حرکت کندشونده است.

$$350=\frac{10\times t_1}{2}+\left|\frac{-200}{t_1}\times\frac{(40-t_1)}{2}\right|\Rightarrow\begin{cases}t_1=10s\\ 40-t_1=30s\end{cases}$$

اطلاعات مسئله را روی شکل نشان داده‌ایم.

متحرک در بازهٔ t_1 تا 60s در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

$$\text{مسافت طی‌شده}=\frac{(60-10)\times(20)}{2}=500m$$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۱۳ با توجه به نمودار سرعت- زمان داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} ۳۲ = a \times (۱۲ - ۴) + ۰ \Rightarrow a = ۴ \frac{m}{s^۲} \\ ۰ = ۴ \times ۴ + v_0 \Rightarrow v_0 = -۱۶ \frac{m}{s} \end{cases}$$

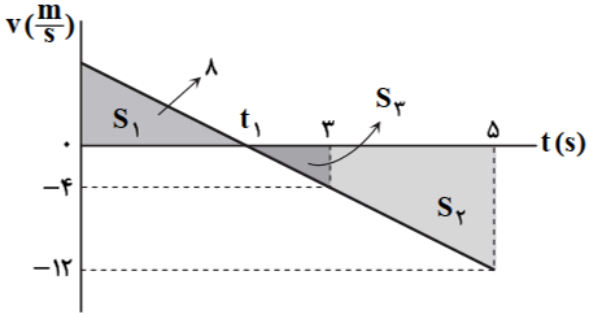
مبدأ زمان را لحظهٔ $t = ۴s$ (لحظهٔ رأس سهمی) فرض می‌کنیم. با توجه به نمودار مکان- زمان، تندی متحرک در مکان $x = -۲m$، صفر است.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲} a t^۲ + v_0 t \Rightarrow ۷۰ - (-۲) = \frac{۱}{۲} \times ۴ t^۲ + ۰ \Rightarrow t = ۶s$$

$t = ۰$ نسبت به $x = ۷۰m$ لحظهٔ عبور از $t = ۶ + ۴ = ۱۰s$:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۴ نمودار $v - t$ را برای متحرک رسم می‌کنیم:



$$\frac{S_۲ + S_۳}{S_۱} = \frac{۱۸}{۸} = \left(\frac{۵ - t_۱}{t_۱}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{۵ - t_۱}{t_۱} \Rightarrow ۳t_۱ = ۱۰ - ۲t_۱$$

$$\Rightarrow ۵t_۱ = ۱۰ \Rightarrow t_۱ = ۲s$$

$$S_۲ + S_۳ = \frac{۱}{۲} \times |v_{(۵s)}| \times ۳ = ۱۸ \Rightarrow |v_{(۵s)}| = ۱۲ \frac{m}{s}$$

از آنجایی که حرکت متحرک شتاب ثابت است:

$$\frac{۱۲}{۳} = \frac{|v_{(۳s)}|}{۱} \Rightarrow |v_{(۳s)}| = ۴ \frac{m}{s}$$

$$S_۳ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱ = ۲m$$

مسافت طی‌شده در سه ثانیهٔ اول برابر با مجموع $S_۱ + |S_۳|$ است:

$$\ell = S_۱ + |S_۳| = ۸ + ۲ = ۱۰m$$

با توجه به تعریف تندی متوسط داریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{۱۰}{۳} \frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۵ شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک است. در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ شیب خط مماس منفی بوده یعنی متحرک در خلاف محور x در حرکت است. از طرفی قدرمطلق این شیب در حال افزایش است (خط مماس به قائم نزدیک می‌شود)؛ یعنی تندی (اندازهٔ سرعت) متحرک زیاد می‌شود.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۶ $v_۲$ سرعت لحظهٔ $t_۲ = ۱۰s$ است و برابر با شیب خط مماس در این لحظه است، یعنی:

$$v_۲ = \frac{۲۲ - (-۸)}{۱۰ - ۰} = \frac{۳۰}{۱۰} = ۳ \frac{m}{s}$$

$v_۱$ سرعت لحظهٔ $t_۱ = ۰$ است و برابر با شیب خط مماس در این لحظه است. چون خط مماس در این لحظه افقی است، این شیب برابر صفر خواهد بود.

$$v_۱ = ۰$$

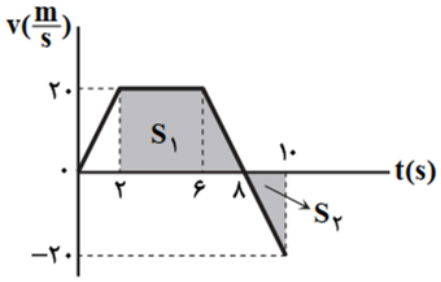
شتاب متوسط برابر است با:

$$a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{\Delta t} = \frac{۳ - ۰}{۱۰ - ۰} = ۰/۳ \frac{m}{s^۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۱۷ مساحت محصور به نمودار سرعت- زمان و محور زمان، (با رعایت علامت) برابر جابـه‌جایی متحرک است. اگر این مساحت به بازهٔ زمانی تقسیم شود، سرعت متوسط محاسبه می‌شود.



$$S_1=\frac{۶+۴}{۲}\times ۲۰=۱۰۰\,m \Rightarrow \Delta x_1=+S_1=+۱۰۰\,m$$

برای محاسبهٔ S_2 به سرعت لحظهٔ $t=۱۰s$ نیاز است. چون شیب خط در بازهٔ زمانی $(۶s,۱۰s)$ ثابت است، می‌توان این سرعت را محاسبه نمود.

$$\text{شیب}=\frac{۰-(-۲۰)}{۸-۶}=-۱۰ \Rightarrow -۱۰=\frac{v_{۱۰}-۰}{۱۰-۸} \Rightarrow v_{۱۰}=-۲۰\frac{m}{s}$$

$$S_2=\frac{۲۰\times ۲}{۲}=۲۰\,m \Rightarrow \Delta x_2=-S_2=-۲۰\,m$$

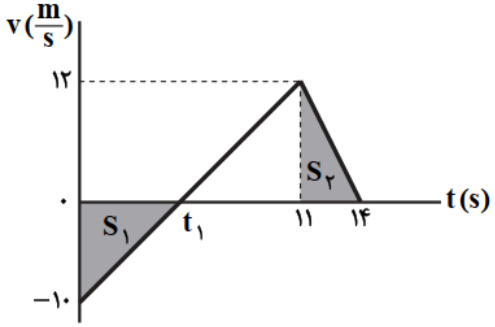
$$\Delta x_t=\Delta x_1+\Delta x_2=S_1+(-S_2)=۱۰۰+(-۲۰)=۸۰\,m \Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x_t}{\Delta t}=\frac{۸۰}{۱۰-۲}=۱۰\frac{m}{s}$$

برای محاسبهٔ تندی متوسط باید مسافت طی‌شده را به زمان تقسیم کنیم. ازاین‌رو مساحت S_2 را مثبت لحاظ می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{\ell_t}{\Delta t}=\frac{S_1+S_2}{\Delta t}=\frac{۱۰۰+۲۰}{۱۰-۲}=\frac{۱۲۰}{۸}=۱۵\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۸ به‌دست آوردن زمانی که سرعت به صفر می‌رسد:



$$\frac{۱۲-(-۱۰)}{۱۱}=\frac{۰-(-۱۰)}{t_1} \Rightarrow \frac{۲۲}{۱۱}=\frac{۱۰}{t_1} \Rightarrow t_1=۵s$$

ناحیه‌های رنگ‌شده بخش‌های کندشوندهٔ حرکت هستند.

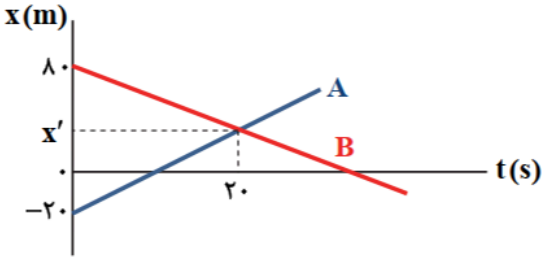
$$\ell=|S_1|+S_2=\frac{۵\times ۱۰}{۲}+\frac{۱۲\times ۳}{۲}=۲۵+۱۸=۴۳\,m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۱۹ راه‌حل اول:

مکان دو متحرک در لحظهٔ $t = ۲۰s$ را x' فرض می‌کنیم. معادلهٔ حرکت دو متحرک را می‌نویسیم و سپس تفریق مکان آن‌ها را برابر $۴۰m$ قرار می‌دهیم:



$$x = vt + x_{\circ} \Rightarrow \begin{cases} x_A = \dfrac{x' - (-۲۰)}{۲۰}t - ۲۰ & \text{رابطهٔ (۱)} \\ x_B = \dfrac{x' - ۸۰}{۲۰}t + ۸۰ & \text{رابطهٔ (۲)} \end{cases}$$

$$x_B - x_A = ۴۰ \xrightarrow{\text{روابط (۱) و (۲)}} \frac{x' - ۸۰}{۲۰}t + ۸۰ - \frac{x' + ۲۰}{۲۰}t + ۲۰ = ۴۰ \Rightarrow -۵t + ۱۰۰ = ۴۰ \Rightarrow t = ۱۲s$$

راه‌حل دوم:

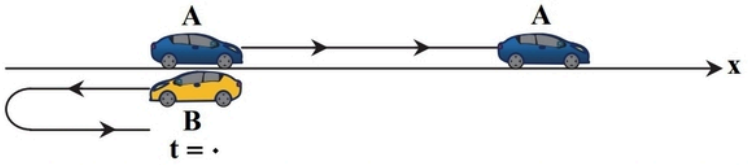
دو متحرک A و B در خلاف جهت هم به یکدیگر نزدیک می‌شوند و فاصلهٔ $۱۰۰m$ را به‌طور کلی در $۲۰s$ طی می‌کنند. به این ترتیب مجموع تندی آن‌ها $\frac{۱۰۰}{۲۰} = ۵\frac{m}{s}$ است. وقتی فاصلهٔ آن‌ها به $۴۰m$ می‌رسد، یعنی در کل $۶۰m$ را با تندی مجموع $۵\frac{m}{s}$ طی کرده‌اند؛ پس زمان آن برابر می‌شود با:

$$t = \frac{۶۰m}{۵\frac{m}{s}} = ۱۲s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۲۰



متحرک A در کل بازهٔ زمانی صفر تا $t = ۱۲s$ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند (چون سرعت آن مثبت است)، ولی متحرک B در بازهٔ زمانی صفر تا $t = ۴s$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، پس از متحرک A دور می‌شود. در لحظهٔ $t = ۴s$ متحرک B می‌ایستد و برمی‌گردد و تدریجاً تندی خود را زیاد می‌کند، ولی تا لحظهٔ $t = ۸s$ هنوز تندی آن از تندی متحرک A کمتر است و در نتیجه فاصلهٔ آن‌ها همچنان زیاد می‌شود. از لحظهٔ $t = ۸s$ به بعد، تندی متحرک B بیشتر از A بوده و چون در پشت سر A در حرکت است، فاصلهٔ آن تا A کم می‌شود، بنابراین بیشترین فاصلهٔ دو متحرک در $t = ۸s$ است. با کمی دقت معلوم می‌شود متحرک B در بازهٔ صفر تا $t = ۸s$ به مکان اولیهٔ خود بازمی‌گردد و جابه‌جایی آن صفر است، لذا کافی است جابه‌جایی متحرک A را در بازهٔ زمانی صفر تا $t = ۸s$ محاسبه کنیم. توجه کنید شتاب متحرک A در بازهٔ $(۴s, ۱۲s)$ ثابت بوده و درنتیجه در تمام این بازه شتاب متوسط یکسان است.

$$a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow a_{(۸s,۱۲s)} = \frac{۰ - ۱۰}{۱۲ - ۸} = -۲/۵ \frac{m}{s^۲}$$

$$a_{(۴s,۱۲s)} = \frac{۰ - v_۴}{۱۲ - ۴} \Rightarrow -۲/۵ = \frac{-v_۴}{۸} \Rightarrow v_۴ = ۲۰ \frac{m}{s}$$

نمودار $v - t$ متحرک A در هریک از بازه‌های $(۰, ۴s)$ و $(۴s, ۸s)$ خط راست است؛ بنابراین در هریک از این بازه‌ها سرعت متوسط برابر میانگین سرعت اولیه و نهایی آن بازه خواهد بود:

$$v_{av(۰,۴s)} = \frac{v_۰ + v_۴}{۲} = \frac{۱۰ + ۲۰}{۲} = ۱۵ \frac{m}{s} \xrightarrow{v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}} \Delta x_{(۰,۴s)} = ۱۵ \times ۴ = ۶۰m$$

$$v_{av(۴s,۸s)} = \frac{v_۴ + v_۸}{۲} = \frac{۲۰ + ۱۰}{۲} = ۱۵ \frac{m}{s} \Rightarrow \Delta x_{(۴s,۸s)} = ۱۵ \times ۴ = ۶۰m$$

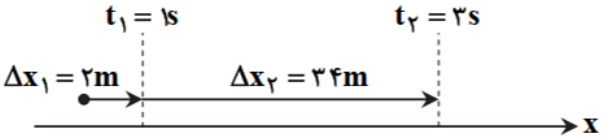
$$\text{بیشترین فاصله} = ۶۰ + ۶۰ = ۱۲۰m$$

نکته: با توجه به اینکه جابه‌جایی برابر با مساحت بین نمودار $v - t$ با محور زمان است نیز می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_{(۰,۴s)} = \frac{۲۰ + ۱۰}{۲} \times ۴ = ۶۰m \\ \Delta x_{(۴s,۸s)} = \frac{۱۰ + ۲۰}{۲} \times ۴ = ۶۰m \end{array}\right\} \Rightarrow \text{بیشترین فاصله} = ۶۰ + ۶۰ = ۱۲۰m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۲۱ جابه‌جایی‌ها را روی محور x نشان می‌دهیم.



رابطهٔ مکان- زمان را یک بار برای بازهٔ صفر تا $t_۱ = ۱s$ و بار دیگر برای بازهٔ صفر تا $t_۲ = ۳s$ می‌نویسیم.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲} a t^۲ + v_۰ t$$

$$\begin{cases} ۲ = \frac{۱}{۲} a \times ۱^۲ + v_۰ \times ۱ \\ ۲ + ۳۴ = \frac{۱}{۲} a \times ۳^۲ + v_۰ \times ۳ \end{cases} \Rightarrow a = ۱۰ \frac{m}{s^۲}, v_۰ = -۳ \frac{m}{s}$$

طبق معادلهٔ سرعت- زمان، سرعت در لحظهٔ $t = ۰/۳s$ برابر است با:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v_{t=۰/۳s} = ۱۰ \times ۰/۳ - ۳ = ۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۲۲ در لحظهٔ $t = ۲s$ تندی متحرک صفر می‌شود (رأس سهمی)؛ در نتیجه برای بازهٔ زمانی صفر تا ۲s می‌توان نوشت:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = a \times ۲ + v_۰ \Rightarrow v_۰ = -۲a$$

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow -۸ - ۰ = \frac{۱}{۲}a \times ۲^۲ + (-۲a) \times ۲ \Rightarrow a = ۴\frac{m}{s^۲}$$

اکنون معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی را برای جابه‌جایی از $x_۱ = -۶m$ تا $x_۲ = -۸m$ می‌نویسیم:

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲a(x_۲ - x_۱) \Rightarrow ۰ - v_۱^۲ = ۲ \times ۴ \times (-۸ - (-۶)) \Rightarrow v_۱ = \pm ۴\frac{m}{s} \Rightarrow |v_۱| = ۴\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۳ محور x را در جهت حرکت و مبدأ مکان را مکان اولیهٔ هر دو متحرک در لحظهٔ سبقت کامیون انتخاب می‌کنیم:

$$v_{۰\,\text{کامیون}} = ۱۴۴ \div ۳/۶ = ۴۰\frac{m}{s}$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow \begin{cases} x_{\text{خودرو}} = \frac{۱}{۲} \times ۲/۲t^۲ + ۰ + ۰ \\ x_{\text{کامیون}} = \frac{۱}{۲}(-۱/۸)t^۲ + ۴۰t + ۰ \end{cases}$$

$$x_{\text{خودرو}} = x_{\text{کامیون}} \Rightarrow ۱/۱t^۲ = -۰/۹t^۲ + ۴۰t \Rightarrow ۲t^۲ - ۴۰t = ۰ \Rightarrow t = ۰ \;,\; t = ۲۰s$$

$$x_{\text{خودرو}} = \frac{۱}{۲} \times ۲/۲ \times ۲۰^۲ = ۴۴۰m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۴ هر متحرکی که روی خط راست از حال سکون شروع به حرکت کند، حرکت آن تندشونده است، چون تندی آن بیشتر از صفر می‌شود. حال برای آنکه در ادامه، حرکت آن کندشونده شود، لزوماً باید جهت شتاب تغییر کند. در این حالت، اگر این شتاب تا پس از توقف نیز ادامه داشته باشد، دوباره حرکت تندشونده می‌شود.

در بازهٔ زمانی صفر تا ۵s داریم: $v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۴ \times ۵ + ۰ = ۲۰\frac{m}{s}$

در بازهٔ زمانی صفر تا ۵s، تندی متحرک از صفر به $۲۰\frac{m}{s}$ می‌رسد و حرکت تندشونده است.

در بازهٔ ۵s تا ۱۰s داریم:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow v = ۲ \times ۵ + ۲۰ = ۳۰\frac{m}{s}$$

توجه کنید که تندی متحرک در انتهای بازهٔ زمانی قبلی، همان تندی اولیهٔ متحرک در این بازه است. در بازهٔ زمانی ۵s تا ۱۰s، تندی متحرک از $۲۰\frac{m}{s}$ به $۳۰\frac{m}{s}$ رسیده و حرکت تندشونده است.

از لحظهٔ $t = ۱۰s$ به بعد، چون شتاب متحرک منفی و سرعت آن مثبت است، حرکت کندشونده می‌شود و این حرکت کندشونده تا وقتی که تندی متحرک به صفر برسد، ادامه دارد.

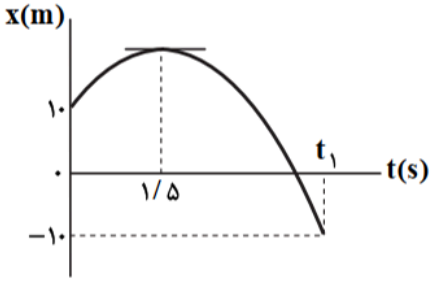
$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۵t + ۳۰ \Rightarrow t = ۶s$$

به این ترتیب در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۱۶s حرکت کندشونده و در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰s و ۱۶s تا ۲۰s حرکت تندشونده است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۲۵ با توجه به شیب خط واصل بین دو لحظهٔ صفر تا t_1، سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 منفی است:



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow -۵=\frac{-۱۰-۱۰}{t_۱-۰}\Rightarrow t_۱=۴s$$

در بازهٔ زمانی صفر تا $t_1=۴s$ داریم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow -۱۰-۱۰=\frac{۱}{۲}a\times ۴^۲+v_۰\times ۴$$

$$\Rightarrow -۲۰=۸a+۴v_۰\quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

در بازهٔ زمانی صفر تا $۱/۵s$ داریم:

$$v=at+v_۰\Rightarrow ۰=۱/۵a+v_۰\quad \text{رابطهٔ (۲)}$$

$$\xrightarrow{\text{روابط (۱) و (۲)}}\begin{cases}-۲۰=۸a+۴v_۰\\ ۰=۱/۵a+v_۰\end{cases}\Rightarrow a=-۱۰\frac{m}{s^۲}\ ,\ v_۰=۱۵\frac{m}{s}$$

$$v=at+v_۰\Rightarrow\begin{cases}۱۰=-۱۰t+۱۵\Rightarrow t=۰/۵s\\ -۱۰=-۱۰t+۱۵\Rightarrow t=۲/۵s\end{cases}$$

در بازهٔ زمانی صفر تا $۰/۵s$، تندی متحرک از $۱۵\frac{m}{s}$ به $۱۰\frac{m}{s}$ می‌رسد. در بازهٔ زمانی $۰/۵s$ تا $۱/۵s$، تندی متحرک از $۱۰\frac{m}{s}$ به صفر می‌رسد و در بازهٔ زمانی $۱/۵s$ تا $۲/۵s$، تندی متحرک از صفر به $۱۰\frac{m}{s}$ می‌رسد؛ پس به مدت $۲s$ تندی متحرک کمتر از $۱۰\frac{m}{s}$ بوده است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۲۶ چون معادلهٔ مکان- زمان درجهٔ ۲ است، حرکت با شتاب ثابت بر خط راست است.

$$\left.\begin{aligned}x&=-۵t^۲+۲۰t\\ x&=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{۱}{۲}a=-۵\Rightarrow a=-۱۰\frac{m}{s^۲}$$

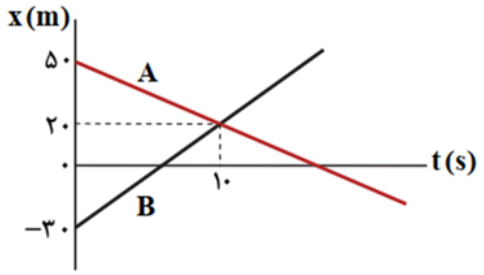
$$F_{net}=ma=۰/۲\times(-۱۰)=-۲N$$

$$F_{net}=\frac{\Delta p}{\Delta t}\Rightarrow \Delta p=(F_{net})\cdot\Delta t=-۲\times ۲=-۴\frac{kg\cdot m}{s}\Rightarrow \Delta\vec{p}=-۴\vec{i}(\frac{kg\cdot m}{s})$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۲۷



$t_1 = 0s \Rightarrow x_{0A} - x_{0B} = 50 - (-30) = 80m$

$t_2 = 20s \Rightarrow x_B - x_A = 80m$ رابطهٔ (۱)

$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_B = 20v_B - 30 \\ x_A = 20v_A + 50 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} 20v_B - 30 - 20v_A - 50 = 80$

$\Rightarrow v_B - v_A = 8\frac{m}{s}$ رابطهٔ (۲)

$x_B = x_A \Rightarrow v_B t - 30 = v_A t + 50 \Rightarrow (v_B - v_A)t = 80 \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۲)}} 8t = 80 \Rightarrow t = 10s$

$v_B = \frac{20 - (-30)}{10} = 5\frac{m}{s}$

$x_B = v_B t + x_{0B} \Rightarrow 0 = 5t - 30 \Rightarrow t = 6s$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۸

$$\left.\begin{array}{l} v = at + v_0 \xrightarrow{v(5)=0} 5a + v_0 = 0 \Rightarrow a = \frac{-v_0}{5} \\ \Delta x = \frac{v + v_0}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow 80 - 30 = \frac{0 + v_0}{2} \times 5 \Rightarrow v_0 = +20\frac{m}{s} \end{array}\right\} \Rightarrow a = \frac{-20}{5} = -4\frac{m}{s^2}$$

۳ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی $t = 3s$ تا $t = 6s$:

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow x = -2t^2 + 20t + 30$

$x(3) = -18 + 60 + 30 = 72m$

$x(6) = -72 + 120 + 30 = 78m$

$\ell = |x(6) - x(5)| + |x(5) - x(3)| = 2 + 8 = 10m$

در $t = 5s$ جهت حرکت عوض می‌شود:

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۹

جهت حرکت را جهت مثبت محور x می‌گیریم:

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - v_0^2 = 2(-2/5)(80) \Rightarrow v_0 = 20\frac{m}{s}$

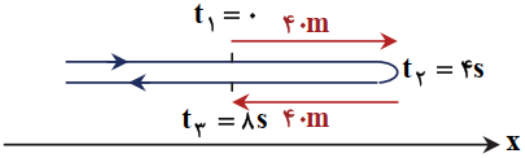
در $1s$ تأخیر راننده، خودرو به‌اندازهٔ $\Delta x = (20\frac{m}{s}) \times (1s) = 20m$ به مانع نزدیک می‌شود.

$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 20^2 = 2(-2/5)(80 - 20) \Rightarrow v = 10\frac{m}{s}$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۳۰ در حرکت با شتاب ثابت تنها در حالتی در دو بازهٔ زمانی مساوی و متوالی (مانند این سؤال چهار ثانیه اول و دوم) مسافت پیموده شده برابر است که متحرک در یکی از این ۴ ثانیه حرکت رفت به‌صورت کندشونده تا توقف و در برگشت به‌صورت تندشونده از حال سکون داشته باشد. مانند شکل زیر:



$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} t \Rightarrow +40 = \frac{0 + v_0}{2} \times 4 \Rightarrow v_0 = 20 \frac{m}{s}$$

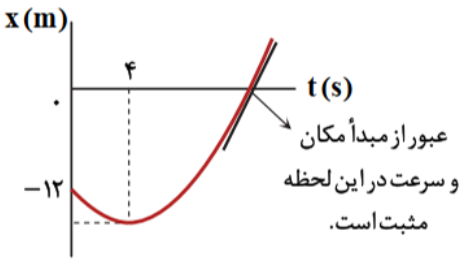
$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = a \times 4 + 20 \Rightarrow a = -5 \frac{m}{s^2}$$

$$t = 3s \Rightarrow v = -5 \times 3 + 20 = 5 \frac{m}{s}$$

تذکر: چنانچه جهت حرکت در ابتدا در خلاف محور x در نظر گرفته شود علامت سرعت و شتاب هر دو قرینه می‌شوند یعنی $v = -5 \frac{m}{s}$ و $a = +5 \frac{m}{s^2}$ هم به‌عنوان پاسخ درست است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۱



$$\begin{cases} \text{در بازهٔ صفر تا عبور از مبدأ مکان: } v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \\ \text{در بازهٔ صفر تا } t = 4s: v = at + v_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4^2 - v_0^2 = 2a(0 + 12) \\ 0 = 4a + v_0 \end{cases} \Rightarrow 16 - (-4a)^2 = 24a$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0/5 \frac{m}{s^2} & \text{(ق ق)} \\ a = -2 \frac{m}{s^2} & \text{(غ ق ق) چون شتاب مثبت است.} \end{cases}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۲ از مقایسهٔ معادلهٔ حرکت متحرک با معادلهٔ مکان- زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 20t + 30 \\ a = 4 \frac{m}{s^2}, \ v_0 = -20 \frac{m}{s}, \ x_0 = 30m \end{cases}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 4t - 20 \Rightarrow t = 5s$$

$$x = 2(5)^2 - 20(5) + 30 = -20m$$

$$x_1 = -20 \Rightarrow t_1 = 5s$$

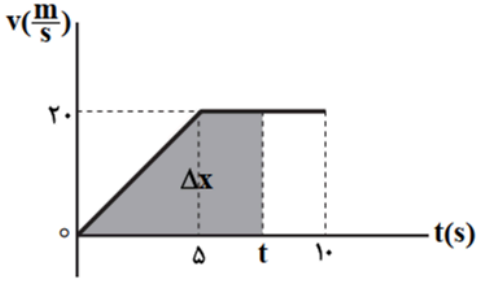
$$x_2 = -12 \Rightarrow -12 = 2t_2^2 - 20t_2 + 30 \Rightarrow \begin{cases} t_2 = 7s & \text{ق ق} \\ t_2 = 3s & \text{غ ق ق؛ چون باید از 5s بیشتر باشد} \end{cases}$$

$$\Delta t = 7 - 5 = 2s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۳۳ مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان با در نظر گرفتن علامت برابر با جابـه‌جایی متحرک است.



با توجه به شکل «الف» جابه‌جایی متحرک برابر است با:

$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = ۸۰ - (-۲۰) = ۱۰۰\,m$$

با توجه به شکل «ب»، فرض می‌کنیم در بازهٔ زمانی صفر تا t جابه‌جایی متحرک برابر با ۱۰۰m باشد، داریم:

$$\Delta x = \frac{t + (t-۵)}{۲} \times ۲۰ = ۱۰۰ \Rightarrow t = ۷/۵\,s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۴

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t$$

برای بازهٔ زمانی ۷s تا ۱۰s می‌توان نوشت:

$$-۳ = \frac{۱}{۲} \times (-۴) \times ۳^۲ + v_{t=۷s} \times ۳ \Rightarrow v_{t=۷s} = ۵\frac{m}{s}$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۵ = (-۴ \times ۷) + v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۳۳\frac{m}{s}$$

حالا با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان داریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow v^۲ - ۳۳^۲ = ۲ \times (-۴) \times (۱۱۵ - ۰)$$

$$\Rightarrow v^۲ = ۱۶۹ \Rightarrow v = \pm ۱۳\frac{m}{s} \Rightarrow |v| = ۱۳\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۵ در حرکت تندشونده جهت شتاب و سرعت یکسان است. با توجه به اینکه شتاب متحرک در این حرکت ثابت و همـواره منفـی اسـت، پـس سرعت هم باید منفی باشد.

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ x = -۲t^۲ + ۲۰t - ۴۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۴\frac{m}{s^۲} \\ v_۰ = ۲۰\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = -۸\frac{m}{s} \\ a = -۴\frac{m}{s^۲} \end{cases} \Rightarrow v = at + v_۰ \Rightarrow -۸ = -۴t + ۲۰ \Rightarrow t = ۷\,s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۳۶ راه‌حل اول:

حرکت کامیون و خودرو به دو قسمت حرکت با شتاب ثابت و حرکت با سرعت ثابت تبدیل می‌شود.

ابتدا حرکت کامیون را بررسی می‌کنیم:

$$\text{حرکت با شتاب ثابت}: \begin{cases} \Delta x_1 = \frac{1}{2} \times 0/5 \times 10^2 + 0 = 25\,m \\ v = 0/5 \times 10 + 0 = 5\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\text{حرکت با سرعت ثابت}: \Delta x_2 = vt = 5 \times 10 = 50\,m \Rightarrow \Delta x_{\text{کامیون}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 75\,m$$

اکنون به بررسی حرکت خودرو می‌پردازیم:

$$\text{حرکت با شتاب ثابت}: \begin{cases} \Delta x_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 10^2 = 100\,m \\ v = 2 \times 10 = 20\,\frac{m}{s} \end{cases}$$

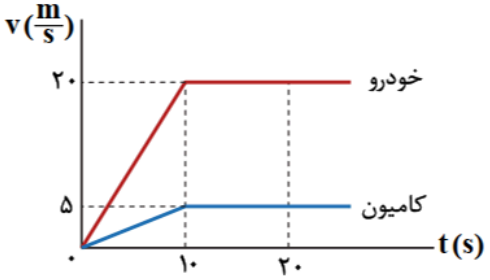
$$\text{حرکت با سرعت ثابت}: \Delta x_2 = 20 \times 10 = 200\,m$$

$$\Rightarrow \Delta x_{\text{خودرو}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 100 + 200 = 300\,m$$

$$\Delta x_{\text{خودرو}} - \Delta x_{\text{کامیون}} = 300 - 75 = 225\,m$$

راه‌حل دوم:

نمودار $v-t$ دو متحرک را رسم می‌کنیم و سطح زیر دو نمودار را محاسبه می‌کنیم:



$$\Delta x_{\text{خودرو}} = \frac{10+20}{2} \times 20 = 300\,m$$

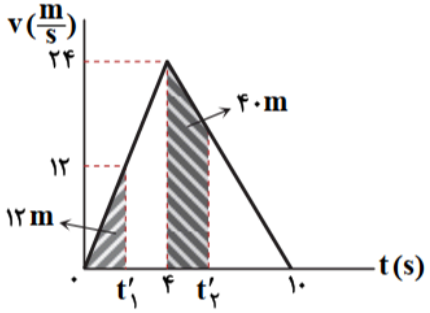
$$\Delta x_{\text{کامیون}} = \frac{10+20}{2} \times 5 = 75\,m$$

$$\Delta x_{\text{خودرو}} - \Delta x_{\text{کامیون}} = 300 - 75 = 225\,m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۳۷ برای محاسبهٔ سرعت متوسط به جابه‌جایی (Δx) و بازهٔ زمانی آن جابه‌جایی (Δt) نیاز داریم. جابه‌جایی در متن سؤال داده شده است اما برای محاسبهٔ زمان باید از داده‌های نمودار کمک بگیریم.



جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $t' = ۴s$ برابر با $\Delta x_۱ = \frac{۲۴\times ۴}{۲} = ۴۸m$ است و چون بیشتر از $۱۲m$ است، پس $۱۲m$ در این بازهٔ زمانی است و داریم:

$$\begin{cases} a_۱ = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۲۴}{۴} = ۶\frac{m}{s^۲} \\ \Delta x = \frac{۱}{۲}a_۱ t^۲ + v_۰ t \Rightarrow ۱۲ = \frac{۱}{۲}\times ۶t'^۲_۱ + ۰ \Rightarrow t'_۱ = ۲s \end{cases}$$

اما $x_۲ = ۸۸m$ بیشتر از $x' = ۴۸m$ است و در بازهٔ زمانی $t' = ۴s$ تا $t_۲ = ۱۰s$ قرار می‌گیرد.

$$\Delta x = ۸۸ - ۴۸ = ۴۰m \quad , \quad a_۲ = \frac{۰ - ۲۴}{۶} = -۴\frac{m}{s^۲}$$

$$۴۰ = \frac{۱}{۲}(-۴)t^۲ + ۲۴t \Rightarrow t^۲ - ۱۲t + ۲۰ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱۰s & \text{غ ق ق} \\ t = ۲s & \text{ق ق} \end{cases} \Rightarrow t'_۲ = ۴ + ۲ = ۶s$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av} = \frac{۸۸ - ۱۲}{۶ - ۲} \Rightarrow v_{av} = ۱۹\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

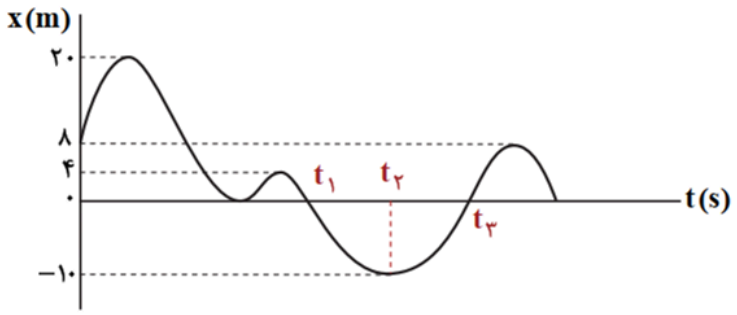
۱۳۸ مسافتِ $L_۱$ در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$ است چراکه در این بازه شیب خط مماس زیاد می‌شود و همچنین این شیب‌ها مثبت‌اند یعنی سرعت، مثبت و متحرک در جهت محور مکان حرکت می‌کند و در ضمن متحرک به مبدأ مکان هم نزدیک می‌شود.

$L_۱ = ۱۰m$

مسافت $L_۲$ در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ است چون در لحظهٔ $t_۱$ مکان از مثبت به منفی تغییر می‌کند.

$L_۲ = (۲۰ - ۸) + ۲۰ + ۴ + ۴ = ۴۰m$

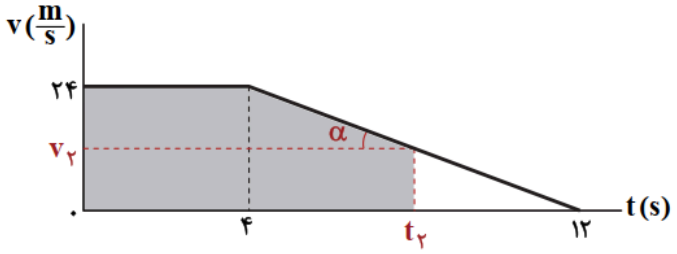
نسبت خواسته‌شده برابر است با: $\frac{L_۱}{L_۲} = \frac{۱۰}{۴۰} = \frac{۱}{۴}$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۳۹



$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\Rightarrow -۱/۵=\frac{v_۲-۲۴}{t_۲-۰}$$ رابطهٔ (۱)

در بازهٔ $t=۴s$ تا $t=۱۲s$:

$$a=\frac{۰-۲۴}{۱۲-۴}=-۳\frac{m}{s^۲}$$

در بازهٔ زمانی $t=۴s$ تا $t_۲$:

$$-۳=\frac{v_۲-۲۴}{t_۲-۴}$$ رابطهٔ (۲)

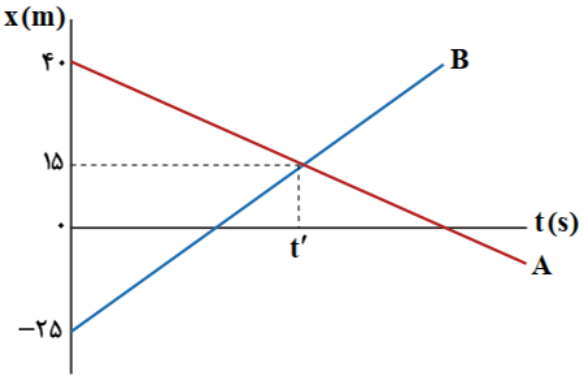
با استفاده از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$-۱/۵=\frac{-۳(t_۲-۴)}{t_۲}\Rightarrow t_۲=۸s\ ,\ v_۲=۱۲\frac{m}{s}$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{S_{\text{رنگی}}}{\Delta t}\Rightarrow v_{av}=\frac{۲۴\times۴+\frac{۲۴+۱۲}{۲}\times۴}{۸}=۲۱\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۰



$$x=vt+x_۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_A=\frac{-۲۵}{t'}t+۴۰ & \text{معادلهٔ حرکت متحرک A}\\ x_B=\frac{۴۰}{t'}t-۲۵ & \text{معادلهٔ حرکت متحرک B}\end{cases}$$

با توجه به نمودار در ابتدا و تا لحظهٔ t' متحرک A در جهت محور x جلوتر از متحرک B است و پس از لحظهٔ t' متحرک B در جهت محور x جلوتر از متحرک A است؛ به این ترتیب داریم:

$$x_A-x_B=۱۰\Rightarrow\frac{-۲۵}{t'}t_۱+۴۰-\frac{۴۰}{t'}t_۱+۲۵=۱۰\Rightarrow\frac{۶۵}{t'}t_۱=۵۵\Rightarrow t_۱=\frac{۵۵}{۶۵}t'$$

$$x_B-x_A=۱۰\Rightarrow\frac{۴۰}{t'}t_۲-۲۵+\frac{۲۵}{t'}t_۲-۴۰=۱۰\Rightarrow\frac{۶۵}{t'}t_۲=۷۵\Rightarrow t_۲=\frac{۷۵}{۶۵}t'$$

$$t_۲-t_۱=۴\Rightarrow\frac{۷۵}{۶۵}t'-\frac{۵۵}{۶۵}t'=۴\Rightarrow t'=۱۳s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴۱

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\Rightarrow\Delta x=\frac{۱}{۲}a\times۱۲^۲+۱۰۰\times۱۲$$ رابطهٔ (۱)

$$v=at+v_۰\Rightarrow v=a\times۱۲+۱۰۰$$

$$\Delta x=vt\Rightarrow\Delta x=(a\times۱۲+۱۰۰)\times۸$$ رابطهٔ (۲)

با استفاده از دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

$$۷۲a+۱۲۰۰+۹۶a+۸۰۰=۱۵۸۰\Rightarrow a=-۲/۵\frac{m}{s^۲}\Rightarrow|a|=۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۴۲

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_A=\frac{۰-۳۰}{۶-۰}=-۵\frac{m}{s^۲}$$

در لحظهٔ $t=۴s$، سرعت متحرک A برابر است با:

$$-۵=\frac{v-۳۰}{۴-۰} \Rightarrow v=۱۰\frac{m}{s}$$

$$a_B=\frac{۱۰-۰}{۴-۰}=۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

لحظهٔ همرسی دو متحرک برابر است با:

$$v=at+v_۰ \Rightarrow \begin{cases} v_A=-۵t+۳۰ \\ v_B=۲/۵t \end{cases} \xrightarrow{v_A=۲v_B \text{ لحظه‌ای که}} -۵t+۳۰=۲(۲/۵t) \Rightarrow t=۳s$$

فرض می‌کنیم A در $t=۰$ در $x_۰=۰$ است.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰$$

$$x_A=x_B \Rightarrow \frac{۱}{۲}(-۵)\times ۳^۲+۳۰\times ۳=\frac{۱}{۲}(۲/۵)\times ۳^۲+۰+x_{۰B} \Rightarrow x_{۰B}=۵۶/۲۵m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴۳

با توجه به نمودار مکان- زمان، شتاب خودرو منفی است:

$$a=-۲\frac{m}{s^۲}$$

در بازهٔ زمانی $۱۰s$ نشان داده‌شده روی شکل صورت سؤال داریم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow ۱۷۵-۳۷۵=\frac{۱}{۲}(-۲)\times ۱۰^۲+v_۰\times ۱۰ \Rightarrow v_۰=-۱۰\frac{m}{s}$$

سرعت اولیهٔ ابتدای بازهٔ $۱۰s$ برابر با $v_۰=-۱۰\frac{m}{s}$ است.

در فاصلهٔ $x_۱=۳۷۵m$ تا $x=۱۱۱m$:

$$v^۲-v_۰^۲=۲a\Delta x \Rightarrow v^۲-(-۱۰)^۲=۲(-۲)(۱۱۱-۳۷۵) \Rightarrow v=\pm ۳۴\frac{m}{s}$$

سرعت در مکان $x=۱۱۱m$ منفی است:

$$v=-۳۴\frac{m}{s}$$

در فاصلهٔ $x_۱=۳۷۵m$ تا $x=۰$:

$$v^۲-(-۱۰)^۲=۲(-۲)(۰-۳۷۵) \Rightarrow v=-۴۰\frac{m}{s}$$

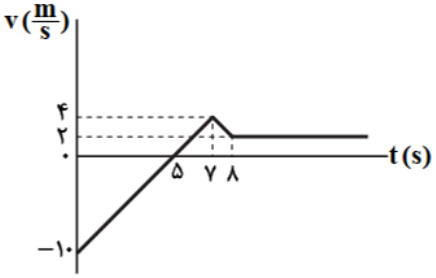
$$v=at+v_۰ \Rightarrow -۴۰=-۲t+(-۳۴) \Rightarrow t=۳s$$

تذکر: راه‌حل‌های دیگری هم وجود دارد. شما می‌توانید از طریق معادلهٔ مکان- زمان هم پاسخ را بیابید.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۴۴ با توجه به نمودار سرعت- زمان لحظهٔ تغییر جهت حرکت، $t = ۵\,s$ است؛ یعنی زمانی که علامت v عوض می‌شود.



جابه‌جایی متحرک از $t = ۰$ تا عبور از مبدأ برابر است با:

$$x(۰) = ۱۰\,m \text{ و } x(t_۱) = ۰ \Rightarrow \Delta x = -۱۰\,m$$

پس باید حاصل جمع جبری مساحت‌های زیر نمودار $v-t$ از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = t_۱$ برابر ۱۰- شود. روشن است که یک جواب قبل از $t = ۵\,s$ وجود دارد؛ اما آن جواب موردنظر نیست (بعد از تغییرِ جهتِ حرکت خواسته شده است).

$$\Delta x = -\frac{۱۰\times۵}{۲} + \frac{۲\times۴}{۲} + \frac{۱\times(۲+۴)}{۲} + ۲(t_۱ - ۸)$$

$$\Delta x = -۲۵ + ۴ + ۳ + ۲t_۱ - ۱۶ = -۱۰ \Rightarrow ۲t_۱ = ۲۴ \Rightarrow t_۱ = ۱۲\,s \Rightarrow \Delta t = ۱۲ - ۵ = ۷\,s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۵ شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در هر لحظه، بیانگر سرعت لحظه‌ای در همان لحظه است. ابتدا سرعت در لحظه‌های $t = ۳\,s$ و $t = ۶\,s$ را محاسبه می‌کنیم:

$$v_{t=۶s} = \text{شیب خط مماس} = \frac{۲۷ - ۰}{۶ - ۰} = ۴/۵\,\frac{m}{s}$$

$$v_{t=۳s} = \text{شیب خط مماس} = \frac{۱۸ - ۰}{۶ - ۰} = ۳\,\frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{(۴/۵\,\frac{m}{s}) - (۳\,\frac{m}{s})}{(۶s) - (۳s)} = \frac{۱}{۲}\,\frac{m}{s^۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۶ دو متحرک اگر به هم نرسیده باشند، کمترین فاصلهٔ آن‌ها وقتی است که تندی متحرک اول $v = ۳۰\,\frac{m}{s}$ می‌شود و پس از آن چون تندی متحرک جلویی بیشتر می‌شود، فاصلهٔ بین آن‌ها بیشتر می‌شود.

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۳۰ = ۶t + ۰ \Rightarrow t = ۵s$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x_۱ = \frac{۱}{۲}\times۶\times(۵)^۲ = ۷۵\,m$$

مدت‌زمان حرکت متحرک دوم : $\Delta t = ۵ - ۳ = ۲s$

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow x_۲ = vt + (-۱۰) = ۳۰\times۲ - ۱۰ = ۵۰\,m$$

کمترین فاصله بین دو متحرک: $d = x_۱ - x_۲ = ۷۵ - ۵۰ = ۲۵\,m$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۴۷ بازهٔ $t = ۰s$ تا $t = ۱۲\,s$: $v = at + v_۰ \Rightarrow ۱۸ = a\times۱۲ + (-۶) \Rightarrow a = ۲\,\frac{m}{s^۲}$

محاسبهٔ لحظهٔ $t_۱$: $v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = ۲\times t_۱ + (-۶) \Rightarrow t_۱ = ۳\,s$

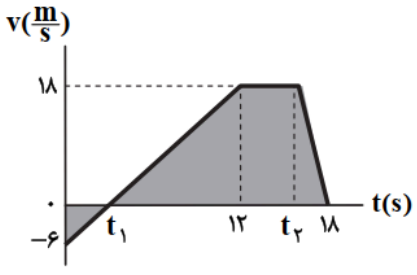
مساحت سطح بین نمودار $v-t$ با محور زمان برابر با جابه‌جایی است.

$\Delta x =$ مساحت مثلث + مساحت ذوزنقه

$$۱۷۱ = \frac{-۶\times۳}{۲} + \frac{۱۵ + (t_۲ - ۱۲)}{۲}\times۱۸ \Rightarrow t_۲ = ۱۷\,s$$

از لحظهٔ $t = ۱۲\,s$ تا $t = ۱۷\,s$ حرکت با سرعت ثابت بوده است؛ پس:

$$\Delta t = ۱۷ - ۱۲ = ۵\,s$$



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۴۸

$$\Delta x = \frac{v + v_0}{2} \cdot \Delta t \Rightarrow 80 - 5 = \frac{0 + v_0}{2} \times 5 \Rightarrow v_0 = \frac{150}{5} = 30 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = 5a + v_0 = 5a + 30 \Rightarrow a = -6 \frac{m}{s^2}$$

حال با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان، تندی متحرک را در $x = 53\,m$ به‌دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - 900 = 2 \times (-6) \times (53 - 5)$$

$$\Rightarrow v^2 = 900 - 2 \times 6 \times 48 = 9(100 - 2 \times 2 \times 16) = 9 \times 36 \Rightarrow v = 3 \times 6 = 18 \frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow 18 = -6 \times t + 30 \Rightarrow t = 2s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۹

به‌سادگی درمی‌یابیم که متحرک در لحظهٔ $t = 4s$ به مکان $x = -20\,m$ رسیده و سرعت آن صفر است. (چگونه؟)

برای بازهٔ زمانی $t = 4s$ تا $t = 8s$ داریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_0 t \Rightarrow 0 - (-20) = \frac{1}{2} a \times 4^2 + 0 \times 4 \Rightarrow a = 2/5 \frac{m}{s^2}$$

اکنون برای بازهٔ زمانی $t = 4s$ تا $t = 14s$ داریم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2/5 \times 10 + 0 = 25 \frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۰

$$x_1 = \frac{1}{2} a t_1^2 + v_0 t_1 + x_0 \Rightarrow 4 = \frac{1}{2} \times 2 \times t_1^2 + 0 + 0 \Rightarrow t_1 = 2s$$

برای فاصلهٔ x_1 تا x_2 داریم:

$$v_1 = at_1 + v_0 \Rightarrow v_1 = 2 \times 2 + 0 = 4 \frac{m}{s}$$

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} \Rightarrow 20 = \frac{4 + v_2}{2} \Rightarrow v_2 = 36 \frac{m}{s}$$

$$v_2 = at_2 + v_0 \Rightarrow 36 = 2t_2 + 0 \Rightarrow t_2 = 18\,s$$

$$x_2 = \frac{1}{2} a t_2^2 + v_0 t_2 + x_0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 18^2 + 0 + 0 = 324\,m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۱

$$t_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 - 0 = 0$$

$$t_2 = ? \Rightarrow x_2 = 2t_2^3 - 24t_2$$

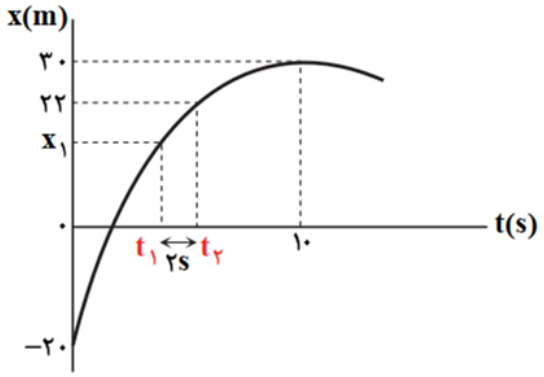
$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 74 = \frac{2t_2^3 - 24t_2}{t_2 - 0} \Rightarrow 74t_2 = 2t_2^3 - 24t_2$$

$$\Rightarrow 2t_2^3 = 98t_2 \Rightarrow t_2^2 = 49 \Rightarrow t_2 = 7s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۵۲ در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۰s:



$$\begin{cases}\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t\\ v=at+v_۰\end{cases}\Rightarrow \Delta x=-\frac{۱}{۲}at^۲+vt$$

$$\Rightarrow ۳۰-(-۲۰)=-\frac{۱}{۲}a\times ۱۰^۲+۰\times ۱۰ \Rightarrow a=-۱\frac{m}{s^۲}$$

در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا ۱۰s:

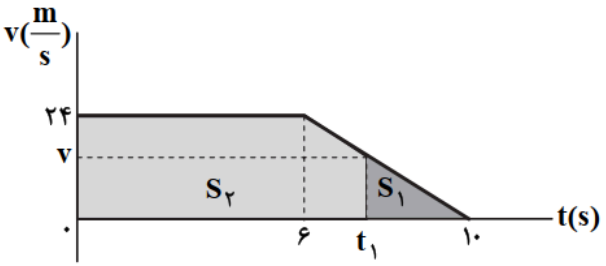
$$v^۲-v_{t_۲}^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۰-v_{t_۲}^۲=۲(-۱)(۳۰-۲۲) \Rightarrow v_{t_۲}=۴\frac{m}{s}$$

در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$:

$$\Delta x=-\frac{۱}{۲}at^۲+vt \Rightarrow ۲۲-x_۱=\frac{-۱}{۲}(-۱)\times ۲^۲+۴\times ۲ \Rightarrow x_۱=۱۲m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۳ شتاب متوسط در بازهٔ زمانی صفر تا ۶s صفر است. پس لحظهٔ مورد نظر ($t_۱$) در بازهٔ ۶s تا ۱۰s واقع است، مانند شکل زیر:



$$\text{شیب خط}=\frac{۰-۲۴}{۱۰-۶}=-۶\frac{m}{s^۲} \Rightarrow v=۶(۱۰-t_۱)$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -۲=\frac{۶۰-۶t_۱-۲۴}{t_۱} \Rightarrow t_۱=۹s$$

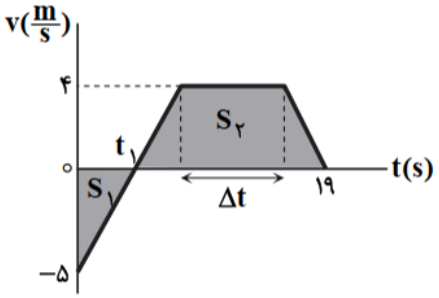
$$S_۱=\frac{۱\times ۶}{۲}=۳m$$

$$S_۲=\frac{۱۰+۶}{۲}\times ۲۴-۳=۱۸۹m$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{av}=\frac{۱۸۹}{۹-۰}=۲۱\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۴



$$\begin{cases}S_۲+|S_۱|=۵۰m\\ S_۲-|S_۱|=۳۰m\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}S_۲=۴۰m\\ |S_۱|=۱۰m\end{cases}\Rightarrow S_۱=-۱۰m$$

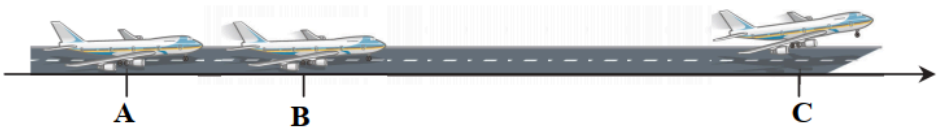
$$S_۱=-۱۰=\frac{-۵\times t_۱}{۲} \Rightarrow t_۱=۴s$$

$$S_۲=۴۰=\frac{(۱۹-۴)+\Delta t}{۲}\times ۴ \Rightarrow \Delta t=۵s$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۵۵ راه‌حل اول:



در شکل بالا فاصلهٔ AC کل مسافت روی باند، فاصلهٔ BC برابر ۳۰۰m، زمان پیمودن BC برابر ۵s و تندی هواپیما در نقطهٔ C برابر $۸۰\frac{m}{s}$ است.

$$\Delta x=\frac{v+v_{\circ}}{۲}\Delta t \Rightarrow ۳۰۰=\frac{۸۰+v_B}{۲}\times ۵ \Rightarrow v_B=۴۰\frac{m}{s}$$

$$v=at+v_{\circ} \Rightarrow ۸۰=a\times ۵+۴۰ \Rightarrow a=۸\frac{m}{s^۲}$$

$$v^۲-v_{\circ}^۲=۲a\Delta x \Rightarrow ۸۰^۲-۰=۲\times ۸\times \Delta x_{AC} \Rightarrow \Delta x_{AC}=۴۰۰m$$

راه‌حل دوم:

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_{\circ}t\\ v=at+v_{\circ}\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ترکیب دو معادله}} \Delta x=-\frac{۱}{۲}at^۲+vt$$

$$۳۰۰=-\frac{۱}{۲}a\times ۵^۲+۸۰\times ۵ \Rightarrow a=۸\frac{m}{s^۲}$$

$$v^۲-v_{\circ}^۲=۲a\Delta x_{AC} \Rightarrow ۸۰^۲-۰=۲\times ۸\times \Delta x_{AC} \Rightarrow \Delta x_{AC}=۴۰۰m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۶

جابه‌جایی در مدت‌زمان واکنش: $\Delta x'=vt$

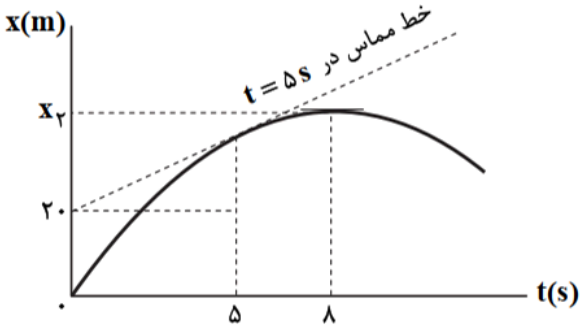
جابه‌جایی در حرکت شتاب‌دار: $\Delta x=\Delta x_{\text{کل}}-vt$

$$v^۲-v_{\circ}^۲=۲a\Delta x \Rightarrow \begin{cases}۰-۳۰^۲=۲a(۱۹۵-۳۰t)\\ ۰-۲۰^۲=۲a(۹۰-۲۰t)\end{cases} \Rightarrow \frac{-۹۰۰}{-۴۰۰}=\frac{۲a(۱۹۵-۳۰t)}{۲a(۹۰-۲۰t)} \Rightarrow t=۰/۵s$$

$$-۳۰^۲=۲a(۱۹۵-۳۰\times ۰/۵) \Rightarrow a=-۲/۵\frac{m}{s^۲} \Rightarrow |a|=۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۵۷



$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}$$

$$\Rightarrow -۶=\frac{۰-v_۱}{۸-۵} \Rightarrow v_۱=۱۸\frac{m}{s}$$

شیب خط مماس $=v_{t=۵s}$

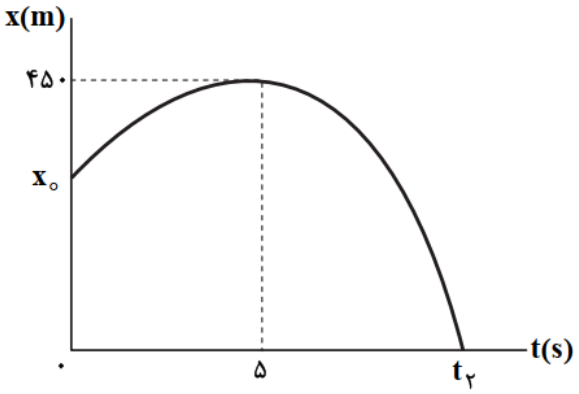
$$\Rightarrow ۱۸=\frac{x_۲-۲۰}{۵-۰} \Rightarrow x_۲=۱۱۰m$$

$$v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱} \Rightarrow v_{av}=\frac{۱۱۰-۰}{۵-۰}=۲۲\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۵۸ در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۲$ داریم:



$$d = x_۰$$

$$L = ۴۵۰ - x_۰ + ۴۵۰$$

$$\frac{L}{d} = ۱/۲۵ \Rightarrow \frac{۹۰۰ - x_۰}{x_۰} = ۱/۲۵ \Rightarrow x_۰ = ۴۰۰\,m$$

$$\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + vt \Rightarrow ۴۵۰ - ۴۰۰ = -\frac{۱}{۲}a \times ۵^۲ + ۰ \times ۵$$

$$\Rightarrow a = -۴\frac{m}{s^۲}$$

با کمی دقت می‌توان متوجه شد که تندی $۴۰\frac{m}{s}$ برای بازهٔ زمانی صفر تا $۵\,s$ نیست. از این رو در بازهٔ زمانی $۵\,s$ تا $t_۲$، رابطهٔ سرعت-جابه‌جایی را می‌نویسیم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow (-۴۰)^۲ - ۰ = ۲ \times (-۴) \times (x - ۴۵۰) \Rightarrow x = ۲۵۰\,m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

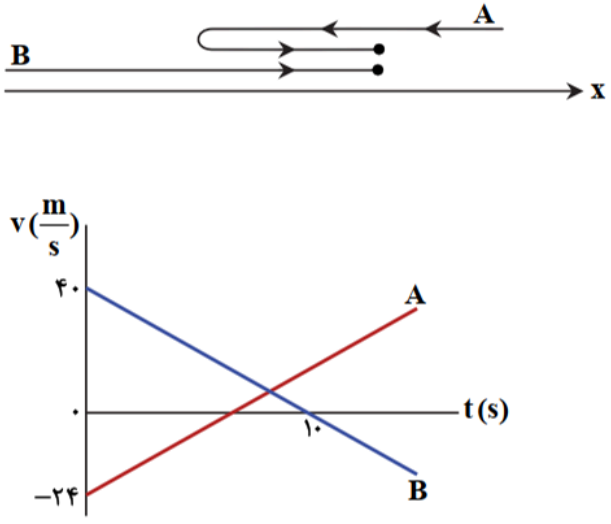
۱۵۹ جهت حرکت را در خلاف محور x فرض می‌کنیم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - v_۰^۲ = ۲a(-۲۰۰) \Rightarrow v_۰^۲ = ۴۰۰a \quad (۱) \text{ رابطهٔ}$$

$$v'^۲ - v_۰^۲ = ۲ \times (a - ۱) \times (-۲۰۰) \xrightarrow{(۱) \text{ رابطهٔ}} v'^۲ - ۴۰۰a = -۴۰۰a + ۴۰۰ \Rightarrow v' = ۲۰\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۰ مسیر حرکت دو متحرک تا لحظهٔ به هم رسیدن (لحظه‌ای که نمودارهای سرعت- زمان یکدیگر را قطع می‌کنند) مانند شکل است. پس کافی است ابتدا لحظهٔ برابری سرعت‌ها (به هم رسیدن) را محاسبه و سپس جابه‌جایی هر متحرک را بیابیم. آنگاه بزرگی جابه‌جایی‌ها را با هم جمع کنیم.



$$a_B = \frac{۰ - ۴۰}{۱۰ - ۰} \Rightarrow a_B = -۴\frac{m}{s^۲} \Rightarrow a_A = +۴\frac{m}{s^۲}$$

$$v = at + v_۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_B = -۴t + ۴۰ \\ v_A = ۴t - ۲۴ \end{cases} \Rightarrow -۴t + ۴۰ = ۴t - ۲۴ \Rightarrow t = ۸\,s$$

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_A = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۸^۲ - ۲۴ \times ۸ = -۶۴\,m \\ \Delta x_B = \frac{۱}{۲}(-۴) \times ۸^۲ + ۴۰ \times ۸ = ۱۹۲\,m \end{cases}$$

فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر در مبدأ زمان $= ۱۹۲ + |-۶۴| = ۲۵۶\,m$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۶۱

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{شیب خط مماس بر نمودار در مبدأ زمان}=v_1=\frac{0-(-30)}{20-0}=15\frac{m}{s}\\ t=5s\ \text{شیب خط مماس بر نمودار در}=v_2=0\frac{m}{s}\end{array}\right\}\Rightarrow a_{av}=\frac{0-15}{5-0}=-3\frac{m}{s^2}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۲

$$v_1=108\div 3/6=30\frac{m}{s}$$

راه‌حل اول:

در مدت ۰/۴ ثانیه (زمان واکنش راننده) اتومبیل همچنان با سرعت ثابت $30\frac{m}{s}$ جلو می‌رود.

$$\Delta x_1=v_0\Delta t=30\times 0/4=12m$$

هنگام ترمز گرفتن، مسافت طی شده (Δx_2) برابر است با:

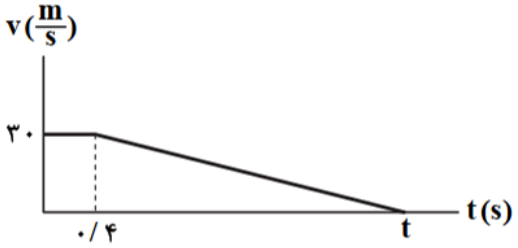
$$v_2^2-v_1^2=2a\Delta x_2\Rightarrow 0-900=2\times(-15)\times\Delta x_2\Rightarrow\Delta x_2=30m$$

بنابراین اتومبیل پس از طی مسافت $\ell=12+30=42m$ متوقف می‌شود و فاصلهٔ آن تا مانع برابر است با:

$$d=50-42=8m$$

راه‌حل دوم:

می‌توانیم نمودار سرعت- زمان اتومبیل را از لحظهٔ دیدن مانع تا توقف، رسم کنیم.



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow -15=\frac{0-30}{\Delta t}\Rightarrow\Delta t=2s$$

$$\Delta t=t-0/4\Rightarrow t=2/4s$$

کل مسافت طی شده تا توقف اتومبیل برابر است با سطح محصور به نمودار $v-t$ و محور زمان. بنابراین:

$$\Delta x=\ell=S=\frac{(0/4+2/4)}{2}\times 30=42m$$

بنابراین فاصلهٔ اتومبیل تا مانع هنگام توقف برابر است با:

$$d=50-42=8m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

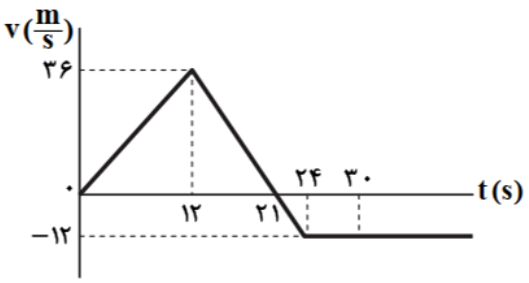
۱۶۳ در یک حرکت بر مسیر مستقیم، بیشترین فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ شروع حرکت یا در انتهای بازهٔ زمانی موردنظر است و یا در یکی از زمان‌هایی که جهت حرکت تغییر می‌کند.

در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۲s: $a=\frac{v_{(12)}-v_0}{12-0} \Rightarrow 3=\frac{v_{(12)}}{12} \Rightarrow v_{(12)}=36\frac{m}{s}$

در بازهٔ زمانی ۱۲s تا ۲۴s: $a'=\frac{v_{(24)}-v_{(12)}}{24-12} \Rightarrow -4=\frac{v_{(24)}-36}{12} \Rightarrow v_{(24)}=-12\frac{m}{s}$

$v=a't+v_{(12)} \Rightarrow 0=-4t+36 \Rightarrow t=9s$

بنابراین لحظه‌ای که تندی متحرک صفر می‌شود، برابر با $t=12+9=21s$ است.



اگر به نمودار سرعت- زمان این حرکت توجه کنید، معلوم می‌شود که متحرک از لحظهٔ $t=0s$ تا $t=21s$ در یک جهت حرکت می‌کند و در لحظهٔ $t=21s$ جهت حرکت عوض می‌شود و واضح است که مسافت طی‌شده توسط متحرک از لحظهٔ $t=21s$ تا $t=30s$ خیلی کمتر از مسافت طی‌شده از لحظهٔ $t=0s$ تا $t=21s$ است، یعنی بیشترین فاصله از نقطهٔ شروع در همان لحظهٔ $t=21s$ اتفاق می‌افتد.

$$S=\frac{21\times 36}{2}=21\times 18=378m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۴ فرض می‌کنیم دو خودرو در لحظهٔ $t=0$ از مکان $x=0$ و در جهت محور x شروع به حرکت می‌کنند.

$$v_{0B}=144\div 3/6=40\frac{m}{s}$$

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow \begin{cases} x_A=\frac{1}{2}\times 2t^2+0\times t=t^2 \\ x_B=\frac{1}{2}(-1/2)t^2+40t=-0/6t^2+40t \end{cases}$$

$$x_A=x_B \Rightarrow t^2=-0/6t^2+40t \Rightarrow t=25s$$

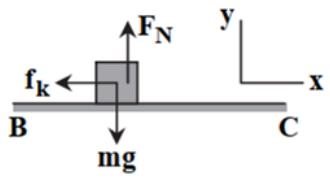
$$x_A=25^2=625m$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۵ اندازهٔ سرعت نقطهٔ B را می‌توان طبق پایستگی انرژی مکانیکی محاسبه نمود.

$$E_A=E_B \Rightarrow mgh_A=\frac{1}{2}mv_B^2 \Rightarrow v_B=\sqrt{2gh_A}=\sqrt{2\times 10\times 5}=10\frac{m}{s}$$

در فاصلهٔ BC به جسم سه نیروی mg، F_N و f_k وارد می‌شود به طوری که برایند mg و F_N برابر صفر است $(F_N=mg)$. برایند نیروهای وارد بر جسم برابر f_k است.



$$F_{net}=ma \Rightarrow -f_k=ma \Rightarrow -\mu_kF_N=ma$$

$$\Rightarrow -\mu_k\cancel{m}g=\cancel{m}a \Rightarrow a=-\mu_kg=-0/25\times 10=-2/5\frac{m}{s^2}$$

$$v=at+v_. \Rightarrow 0=-2/5t+10 \Rightarrow t=4s$$

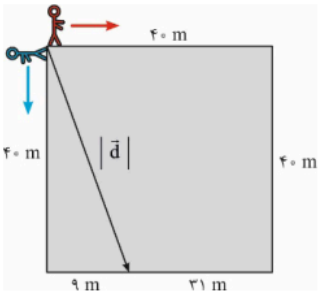
(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۶۶ هنگامی که دو شخص به هم می‌رسند، مجموع مسافت‌هایی که هر دو شخص طی می‌کنند، برابر با محیط مربع است.

$$\begin{cases} L_۱ = ۰/۴۹t \\ L_۲ = ۱/۱۱t \end{cases} \rightarrow L_۱ + L_۲ = ۴a \rightarrow ۰/۴۹t + ۱/۱۱t = ۴ \times ۴۰ \rightarrow t = ۱۰۰s$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} \Rightarrow l = s.\Delta t \Rightarrow \begin{cases} L_۱ = ۰/۴۹ \times ۱۰۰ = ۴۹m \\ L_۲ = ۱/۱۱ \times ۱۰۰ = ۱۱۱m \end{cases}$$



اگر این مقادیر را روی مسیر مربع شکل جدا کنیم نقطه‌ای که به هم می‌رسند مانند شکل مقابل است.

و اندازهٔ جابه‌جایی و سرعت متوسط هر یک برابر است با:

$$|\vec{d}| = \sqrt{۴۰^۲ + ۹^۲} = ۴۱m$$

$$|v_{av}| = \frac{|\vec{d}|}{\Delta t} \rightarrow |v_{av}| = \frac{۴۱}{۱۰۰} = ۰/۴۱\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۷ **گام اول:** ابتدا تندی متوسط در نیمهٔ دوم زمان $(s_{av(۲)})$ را تعیین می‌کنیم. مسافت طی شده را برای هر تندی l در نظر می‌گیریم.

$$s_{av(۲)} = \frac{l+l}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲} \xrightarrow{\Delta t = \frac{l}{s_{av}}} s_{av(۲)} = \frac{۲l}{\frac{l}{S_۱} + \frac{l}{S_۲}} = \frac{۲l}{\frac{l}{۲} + \frac{l}{۸}} = \frac{۲l}{\frac{۵l}{۸}} = \frac{۱۶}{۵}\frac{m}{s}$$

گام دوم: تندی متوسط کل را $S_{av(T)}$ به دست می‌آوریم. مدت زمان هر قسمت از حرکت را Δt در نظر می‌گیریم.

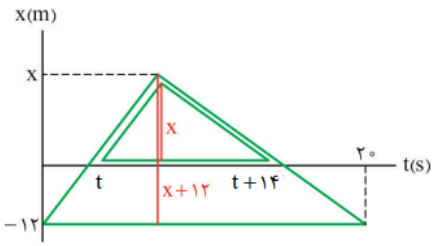
$$s_{av(T)} = \frac{l+l}{\Delta t + \Delta t} \xrightarrow{l = S.\Delta t} s_{av(T)} = \frac{S_۱\Delta T + S_۲\Delta T}{۲\Delta T} = \frac{v_۱\Delta T + \frac{۱۶}{۵}\Delta T}{۲\Delta T} = \frac{۵v_۱ + ۱۶}{۱۰}$$

تندی متوسط به دست آمده را برابر $۴/۶m/s$ قرار می‌دهیم.

$$s_{av(T)} = \frac{l+l}{\Delta t + \Delta t} \xrightarrow{l = S.\Delta t} s_{av(T)} = ۴/۶m/s \Rightarrow \frac{۵v_۱ + ۱۶}{۱۰} = ۴/۶ \Rightarrow ۵v_۱ + ۱۶ = ۴۶ \Rightarrow v_۱ = ۶m/s$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶۸ **گام اول:** با استفاده از تشابه دو مثلث مقدار x را به دست می‌آوریم.



$$\frac{x}{x+۱۲} = \frac{(t+۱۴)-t}{۲۰-۰} \Rightarrow \frac{x}{x+۱۲} = \frac{\cancel{۲۱}^{۷}}{\cancel{۲۰}_{۱۰}}$$

$$۱۰x = ۷x + ۱۲ \times ۷ \Rightarrow ۳x = ۱۲ \times ۷ \Rightarrow x = ۲۸m$$

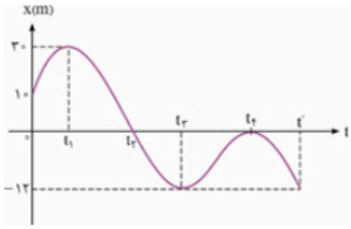
گام دوم: در لحظه‌های $t_۱$ و $t_۱ + ۱۴s$ ، بردار مکان متحرک متغیر جهت داده اســت. تندی متوسط متحرک در این بازه را به دست می‌آوریم:

$$S_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۲(x)}{\Delta t} = \frac{۲ \times ۲۸}{۱۴} = ۴m/s$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud

۱۶۹



به بررسی هر یک از موارد می‌پردازیم:

الف در لحظه t_4 متحرک به مبدا مکان $(x=0)$ می‌رسد و قبل از این لحظه متحرک در جهت مثبت محور و بعد از این لحظه در جهت منفی محور حرکت می‌کند. (درست)

ب جهت بردار مکان فقط در لحظه t_2 تغییر کرده است قبل از آن بردار مکان مثبت و بعد از آن منفی است (نادرست)

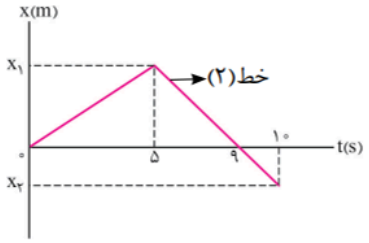
پ در بازهٔ زمانی t_1 تا t_3 مسافت ۴۲m و در بازه t_4 تا t' مسافت ۱۲m است که جمعاً ۵۴m طی می‌شود و جابه‌جایی در این بازه $\Delta x=|-۱۲-۱۰|=۲۲m$ که اختلاف آن‌ها ۳۲m است (نادرست) .

ت مکان در نقطه شروع حرکت $x=۱۰m$ و در لحظه t_3 (یا t_4) مکان $x=-۱۲m$ است که فاصله آن‌ها به ۲۲m می‌رسد. (درست)

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

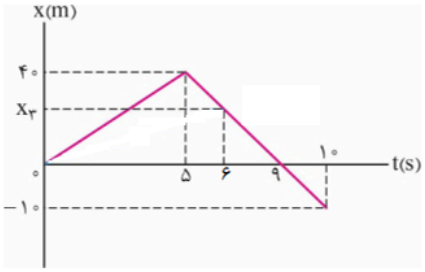
۱۷۰

ابتدا مکان‌های x_1 و x_2 را می‌یابیم تا پس از آن محاسبه سرعت متوسط ممکن شود. در بازه زمانی صفر تا ۱۰s :



با توجه به خط (۲): $\frac{x_1}{۹-۵}=\frac{-x_2}{۱۰-۹}\rightarrow x_2=-\frac{x_1}{۴}$

$$s_{av}=\frac{l}{\Delta t}=\frac{x_1+x_1+\frac{x_1}{۴}}{۱۰}=\frac{۹x_1}{۴۰}\qquad |v_{av}|=\frac{|d|}{\Delta t}=\frac{\frac{x_1}{۴}}{۱۰}=\frac{x_1}{۴۰}$$



حالا اختلاف تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط را برابر $۸\frac{m}{s}$ قرار می‌دهیم:

$$s_{av}-|v_{av}|=۸$$

$$\frac{۹x_1}{۴۰}-\frac{x_1}{۴۰}=۸\rightarrow x_1=۴۰m\ ,x_2=-۱۰m$$

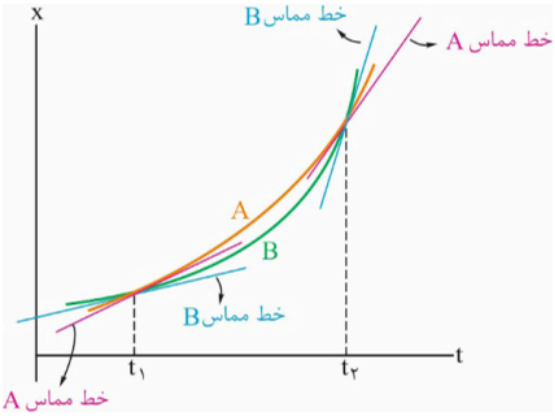
با توجه به نمودار، مکان متحرک در $t=۶s$ را حساب می‌کنیم سپس سرعت متوسط را در بازهٔ (۰,۶s) تعیین می‌کنیم:

$$\frac{x_{۶s}-x_{۵s}}{۶-۵}=\frac{x_{۹s}-x_{۵x}}{۹-۵}\Rightarrow\frac{x_3-۴۰}{۱}=\frac{۰-۴۰}{۴}\Rightarrow x_3=+۳۰m\qquad v_{av(۰-۶s)}=\frac{۳۰-۰}{۶-۰}=۵\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۷۱



به بررسی هر یک از موارد می‌پردازیم:

الف شیب خط مماس بر هر دو نمودار که همان سرعت لحظه‌ای است افزایش یافته به این ترتیب تندی هر دو متحرک A و B افزایش می‌یابد. (نادرست)

ب در لحظه t_1 شیب خط مماس بر نمودار B کمتر از شیب خط مماس بر نمودار A است ولی در لحظه t_2 شیب خط مماس برعکس به این ترتیب افزایش تندی متحرک B از A بیشتر است (درست)

پ با توجه به شکل پائین در لحظه t_1 چون تندی متحرک A بیشتر از B است (شیب خط مماس در لحظهٔ t_1 برای متحرک A بیشتر است) و هر دو در یک مکان قرار دارند، متحرک A از B جلو می‌افتد، زمان می‌گذرد افزایش تندی متحرک B بیشتر از افزایش تندی متحرک A می‌شود و تا لحظه‌ای که تندی‌ها برابر نشده (تندی متحرک A هنوز بیشتر است) فاصلهٔ دو متحرک افزایش می‌یابد. اما در لحظه‌ای که تندی متحرک B از پشت سر برابر با تندی متحرک A که در جلو است می‌شود، فاصله دو متحرک حداکثر و از این لحظه به بعد که تندی متحرک B از پشت سر بیشتر از تندی متحرک A می شود. (درست)

ت توضیح این مورد هم در بخش پایانی پ بیان شد (درست)

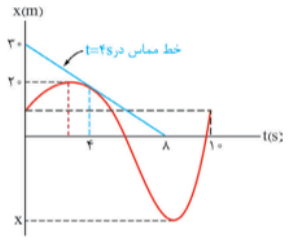
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۷۲

اندازهٔ شیب خط مماس بر منحنی نمودار مکان – زمان در هر لحظه برابر با تندی متحرک در آن لحظه است.

$$|v_{۴s}| = |\text{شیب خط مماس}| = \left|\frac{۰-۳۰}{۸}\right| = ۳/۷۵\frac{m}{s}$$

پس تندی متوسط در ۱۰ ثانیهٔ نخست حرکت باید $۲\times ۳/۵ = ۷/۵\frac{m}{s}$ باشد. مکان تغییر جهت دوم متحرک را x در نظر می‌گیریم.



طبق نمودار مسافت طی شده توسط متحرک و تندی متوسط آن در ۱۰ ثانیهٔ نخست را حساب می‌کنیم.

$$l = ۲\left(۲۰+|x|\right)$$

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۲\left(۲۰+|x|\right)}{۱۰}$$

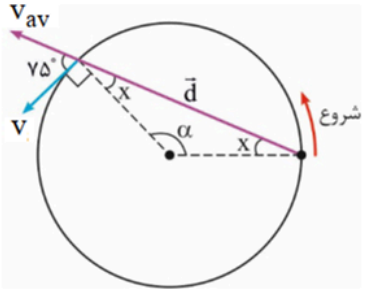
حالا تندی متوسط را برابر $۷/۵\frac{m}{s}$ قرار می‌دهیم تا x به دست بیاید.

$$\frac{۲\left(۲۰+|x|\right)}{۱۰} = ۷/۵ \Rightarrow |x| = ۱۷/۵m \xrightarrow{x<۰} \vec{x} = (-۱۷/۵m)\vec{i}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۷۳ بردار سرعت متوسط هم جهت با جابه‌جایی و بردار سرعت لحظه‌ای مماس بر مسیر حرکت است. بنابراین اگر فرض کنیم که متحرک زاویهٔ مرکزی α درجه را چرخیده است وضعیت بردارهای سرعت متوسط و سرعت لحظه‌ای به صورت شکل زیر است.



با توجه به شکل:

$$۷۵^\circ + ۹۰ + x = ۱۸۰ \Rightarrow x = ۱۵^\circ$$

$$۲x + \alpha = ۱۸۰ \Rightarrow \alpha = ۱۵۰^\circ$$

چون کمترین مقدار تندی خواسته شده، یعنی برای اولین بار متحرک این جابه‌جایی را طی کرده است. پس مسافت طی شده توسط اتومبیل در این مدت برابر است با:

$$l = \frac{\alpha}{۳۶۰} \times (۲\pi R) = \frac{۱۵۰}{۳۶۰} \times (۲ \times ۳ \times ۳۰) = ۷۵m$$

حالا کمترین مقدار s را به دست می‌آوریم:

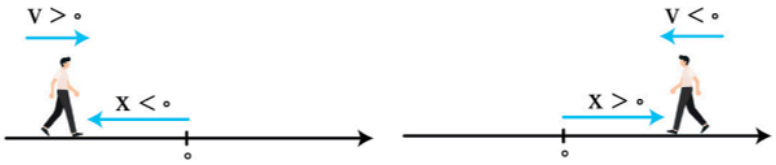
$$s = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۷۵}{۵} = ۱۵\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

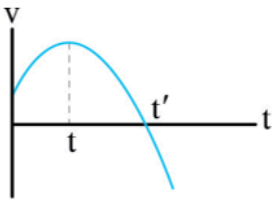
۱۷۴ **به بررسی هریک از موارد می‌پردازیم:**

الف درست؛ با یک مثال این مورد را بررسی می‌کنیم. شخص A و B درون اتوبوس هستند و شخص C در خیابان ساکن ایستاده است. اتوبوس شروع به حرکت می‌کند، اگر یک بار مبدأ مکان را موقعیت شخص B و یک بار موقعیت شخص C را به عنوان مبدأ مکان در نظر بگیریم، از نظر شخص B، شخص A جابجایی نداشته اما از نظر شخص C، شخص A جابجایی داشته است. پس در حالت کلی انتخاب مبدأ مکان در جابجایی تأثیرگذار است.

ب درست؛ به شکل‌های زیر دقت کنید. با توجه به شکل‌ها هنگامی که متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ مکان است، بردارهای سرعت و مکان در خلاف جهت هم هستند. در این حالت طول بردار مکان در حال کاهش است.



پ درست؛ جهت حرکت در هر لحظه همان جهت بردار سرعت است. اگر جهت حرکت ثابت باشد، یعنی بردار سرعت ثابت است. پس حرکت روی خط راست و در یک جهت است. توجه کنید که در حرکت روی مسیر غیر خط راست، دائماً جهت حرکت در حال تغییر است.



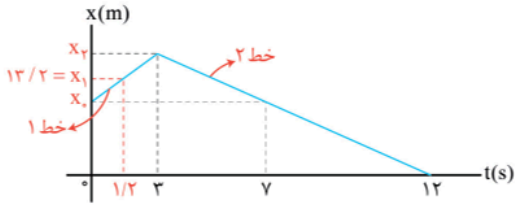
ت درست؛ به نمودار مقابل دقت کنید. در لحظهٔ t، شتاب متحرک (شیب مماس بر نمودار $(v-t)$) صفر است اما سرعت آن مخالف صفر است. علاوه بر این در لحظه‌ای که سرعت متحرک صفر است، شتاب می‌تواند مخالف صفر باشد. (لحظهٔ t')

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۷۵

گام اول: ابتدا مکان متحرک در $t=۱/۲s$ را حساب می‌کنیم.



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$-\frac{۱۱}{۹}=\frac{۰-x_۱}{۱۲-۱/۲}\rightarrow x_۱=۱۳/۲m$$

گام دوم: با توجه به اینکه $x_۰$ همان مکان متحرک در $t=۷s$ است، ارتباط $x_۲$ و $x_۰$ را تعیین می‌کنیم:

$$\text{شیب خط ۲}=\frac{۰-x_۲}{۱۲-۳}=\frac{x_۰-x_۲}{۷-۳}\rightarrow x_۲=۱/۸x_۰$$

گام سوم: با استفاده از شیب خط (۱)، مکان اولیه $(x_۰)$ و مکان متحرک در $(x_۲)t=۳s$ را به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب خط ۱}=\frac{۱/۸x_۰-۱۳/۲}{۳-۱/۲}=\frac{۱/۸x_۰-x_۰}{۳-۰}\rightarrow x_۰=۱۰m\ ,\ x_۲=۱۸m$$

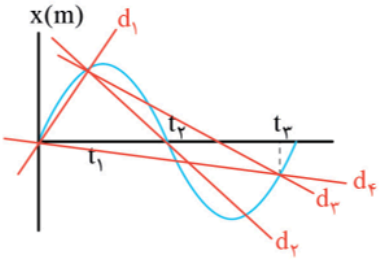
گام چهارم: مسافت طی شده توسط متحرک را تعیین می‌کنیم:

$$\ell=(۱۸-۱۰)+(۱۸+۰)=۲۶m$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۶

گام اول: ابتدا جهت سرعت متوسط در هر یک بازه‌ها را تعیین می‌کنیم. شیب خط واصل بین دو لحظه در نمودار $(x-t)$ برابر سرعت متوسط بین آن دو لحظه است. با توجه به نمودار:



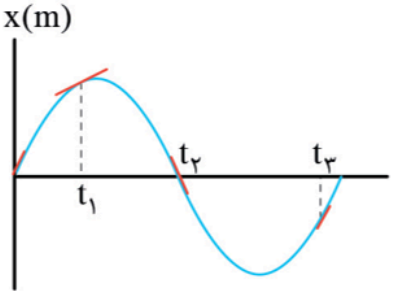
$$m_{d_۱}>۰\Rightarrow v_{av}(۰,t_۱)>۰$$

$$m_{d_۲}<۰\Rightarrow v_{av}(t_۱,t_۲)<۰$$

$$m_{d_۳}<۰\Rightarrow v_{av}(t_۱,t_۳)<۰$$

$$m_{d_۴}<۰\Rightarrow v_{av}(۰,t_۳)<۰$$

گام دوم: خط مماس بر نمودار در لحظه‌های ۰، $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ را رسم می‌کنیم. شیب خط مماس در هر لحظه برابر سرعت متحرک در آن لحظه است. با توجه به شیب خط مماس علامت سرعت‌ها در هر لحظه تعیین می‌شود و بزرگی سرعت‌ها مقایسه می‌شود. بنابراین علامت شتاب متوسط در هر بازه تعیین می‌شود.



$$a_{av(۰,t_۱)}=\frac{v_{t_۱}-v_۰}{t_۱-۰}\xrightarrow[v_{t_۱},v_{t_۲}>۰]{v_{t_۱}<v_{t_۲}}a_{av(۰,t_۱)}<۰$$

$$a_{av(t_۱,t_۲)}=\frac{v_{t_۲}-v_{t_۱}}{t_۲-t_۱}\xrightarrow[v_{t_۱}>۰]{v_{t_۲}<۰}a_{av(t_۱,t_۲)}<۰$$

$$a_{av(t_۱,t_۳)}=\frac{v_{t_۳}-v_{t_۱}}{t_۳-t_۱}\xrightarrow[v_{t_۳},v_{t_۱}>۰]{v_{t_۳}>v_{t_۱}}a_{av(t_۱,t_۳)}>۰$$

$$a_{av(۰,t_۳)}=\frac{v_{t_۳}-v_۰}{t_۳-۰}\xrightarrow[v_{t_۳},v_۰>۰]{v_{t_۳}<v_۰}a_{av(۰,t_۳)}<۰$$

با توجه به تعیین علامت‌های سرعت متوسط و شتاب متوسط در بازه‌ها، گزینهٔ ۳ پاسخ درست است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۷۷

گام اول: مکان متحرک در $t=۲۰s$ را در x در نظر می‌گیریم. سرعت متوسط در ۲۰ ثانیهٔ نخست را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av(۰,۲۰s)}=\frac{x_{۲۰s}-x_{۰}}{۲۰-۰}=\frac{x-(-۱۸)}{۲۰}=\frac{x+۱۸}{۲۰}$$

گام دوم: تندی متحرک در $t=۲۰s$ را به دســـت می متحرک در آن لحظه است.

$$\left|v_{t=۲۰s}\right|=\frac{|x-۰|}{۲۰-۱۷}=\frac{x}{۳}$$

گام ســـوم: طبق صورت سوال، سرعت متوسط به دست آمده گام اول $\frac{۳}{۸}$ برابر تندی به دست آمده در گام دوم است. پس مقدار x برابر است با:

$$\frac{x+۱۸}{۲۰}=\frac{۳}{۸}(\frac{x}{۳})\Rightarrow\frac{x+۱۸}{\cancel{۲۰}\,۵}=\frac{x}{\cancel{۸}\,۲}\Rightarrow ۲x+۳۶=۵x\ ,\ x=۱۲m$$

گام چهارم: سرعت متحرک در لحظه‌های $t_۱=۰$ و $t_۲=۲۰s$ را با استفاده از شیب خط مماس به دست می‌آوریم.

$$v_{۰}=\frac{۱۸}{۲}=۹m/s\ ,\ v_{۲۰s}=\frac{x}{۳}=\frac{۱۲}{۳}=۴m/s$$

گام پنجم: بزرگی شتاب متوسط را به دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{۲۰s}-v_{۰}}{۲۰-۰}=\frac{۴-۹}{۲۰}=\frac{-۱}{۴}m/s^{۲}\Rightarrow\left|a_{av}\right|=\frac{۱}{۴}m/s^{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۸

گام اول: ابتدا مدت زمان‌های $t_۱$ و $t_۲$ را تعیین می‌کنیم.

$$v_{av}=\frac{\Delta x_{۱}+\Delta x_{۲}}{\Delta t_{۱}+\Delta t_{۲}}\xrightarrow{\Delta x=v\Delta t}-۲=\frac{۶t_{۱}-۴t_{۲}}{t_{۱}+t_{۲}}\Rightarrow -۲t_{۱}-۲t_{۲}=۶t_{۱}-۴t_{۲}\Rightarrow ۸t_{۱}=۲t_{۲}\Rightarrow ۴t_{۱}=t_{۲}$$

$$\ell=\left|v_{۱}\right|t_{۱}+\left|v_{۲}\right|t_{۲}\Rightarrow ۶۶=۶t_{۱}+۴t_{۲}\xrightarrow{t_{۲}=۴t_{۱}}۶۶=۶t_{۱}+۱۶t_{۱}\qquad ۶۶=۲۲t_{۱}\Rightarrow t_{۱}=۳s\ ,\ t_{۲}=۴t_{۱}=۱۲s$$

گام دوم: بزرگی شتاب متوسط را در کل زمان حرکت حساب می‌کنیم:

$$\left|a_{av}\right|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}=\frac{|v_{۲}-v_{۱}|}{t_{۱}+t_{۲}}=\frac{۱۰}{۳+۱۲}=\frac{۲}{۳}m/s^{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷۹

گام اول: چون بزرگی شـــتاب متحرک در لحظه‌های $t_۱=۱s$ و $t_۲=۵s$ با هم برابر اســـت و نمودار به صورت سهمی است، این دو لحظه نسبت به رأس تقارن دارند. پس t رأس سهمی برابر است با :

$$t_{\text{رأس}}=\frac{t_{۱}+t_{۲}}{۲}=\frac{۱+۵}{۲}=۳s$$

گام دوم: با توجه به رأس ســـهمی و $v_{۰}=۳۲m/s$ و $v_{۸s}=۰$، معادلهٔ ســـهمی را می‌نویسیم. طبق تقارن چون رأس سهمی ۳s و یک ریشـــهٔ آن ۸s است، ریشـــهٔ دیگر $\frac{۸+t'}{۲}=۳\Rightarrow t'=-۲$ است. پس معادلهٔ سهمی به صورت $v=K(t+۲)(t-۸)$ است. اگر به جای t در این معادله صفر قرار دهیم باید $v=۳۲m/s$ به دست بیاید. پس:

$$v=K(t+۲)(t-۸)\xrightarrow[V=۳۲m/s]{t=۰}۳۲=K(۲)(-۸)\Rightarrow K=-۲\Rightarrow v=-۲(t+۲)(t-۸)=-۲t^{۲}+۱۲t+۳۲$$

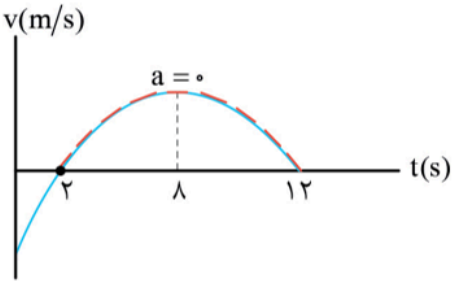
گام سوم: در بازهٔ $t=۳s$ تا $t=۸s$، حرکت متحرک کندشونده است. بزرگی شتاب متوسط در این این بازه را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}v_{۳s}=-۲(۳)^{۲}+۱۲(۳)+۳۲=۵۰m/s\\ v_{۸s}=۰\end{cases}\Rightarrow\left|a_{av(۳s,۸s)}\right|=\frac{|\Delta v|}{\Delta t}=\frac{|v_{۸s}-v_{۳s}|}{۸-۳}=\frac{۵۰}{۵}=۱۰\frac{m}{s^{۲}}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

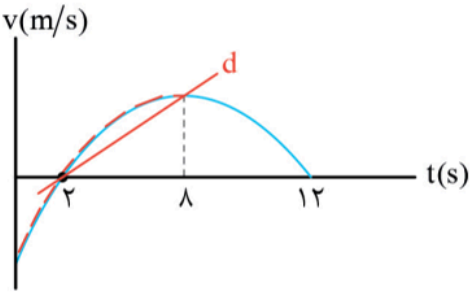
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۸۰ **به بررسی هریک از موارد می‌پردازیم:**



الف درست؛ متحرک در بازهٔ $(۲s,۱۲s)$ در جهت محور حرکت کرده است. بزرگی شتاب برابر بزرگی شیب خط مماس در نمودار $(v-t)$ است. با توجه به شکل زیر بزرگی شتاب در این بازه ابتدا کاهش و سپس افزایش یافته است.

ب درست؛ شیب خط مماس بر نمودار در بازهٔ $(۰,۸s)$ مثبت است. پس شتاب در این بازه مثبت است. در این بازه متحرک در $t = ۲s$ تغییر جهت داده است، زیرا سرعت متحرک صفر شده و علامت سرعت آن عوض شده است.



پ نادرست؛ بزرگی شیب خط مماس بر نمودار که همان بزرگی شتاب است در بازهٔ $(۸s,۱۲s)$ در حال افزایش است. در این بازه $v > ۰$ است، یعنی حرکت متحرک در جهت محور می‌باشد.

ت درست؛ بزرگی شتاب متوسط متحرک در بازهٔ $(۸s$ و $۲s)$ برابر شیب خط d است. با توجه به خط مماس‌های رسم شده در بازهٔ $(۰,۸s)$، شیب خط مماس‌ها در $t = ۰$ از عددی بزرگ‌تر از شیب خط d شروع شده و به طور پیوسته کاهش می‌یابد تا به عدد صفر برسد. بنابراین در این بازه تنها یک لحظه یافت می‌شود که بزرگی شتاب در آن لحظه با بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ $(۲s,۸s)$ برابر باشد. بنابراین تنها مورد (پ) نادرست است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸۱ **گام اول:** فاصله دو نقطه را Δx و مدت زمان حرکت خودروی سوم را t فرض می‌کنیم به این ترتیب زمان حرکت خودروی اول که تندتر می‌رود $(t-\Delta t)$ و زمان حرکت خودروی دوم که کندتر می‌رود $(t+\Delta t)$ است. رابطهٔ $\Delta x = v.\Delta t$ را برای هر سه متحرک می‌نویسیم:

$$\text{اولی}: \Delta x = ۱۲۰(t-\Delta t) \quad \text{دومی}: \Delta x = ۸۰(t+\Delta t) \quad \text{سومی}: \Delta x = vt$$

گام دوم: معادله‌های متحرک اول و دوم را با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$۰/۵t = ۲/۵\Delta t \rightarrow t = ۵\Delta t \qquad ۱/۵(t-\Delta t) = t+\Delta t \qquad ۱۲۰(t-\Delta t) = ۸۰(t+\Delta t)$$

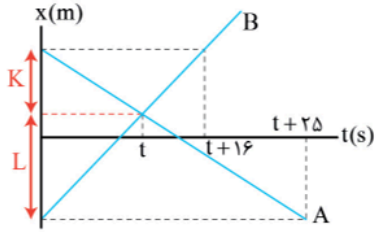
گام سوم: معادله‌های متحرک اول و سوم را با هم برابر قرار می‌دهیم و با جایگذاری نتیجه به دست آمده در گام قبلی، v را به دست می‌آوریم:

$$v = \frac{۱۲۰\times ۴\Delta t}{۵\Delta t} = ۹۶\frac{km}{h} \qquad ۱۲۰(۵\Delta t - \Delta t) = v(۵\Delta t) \qquad ۱۲۰(t-\Delta t) = vt$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۸۲ **گام اول:** با توجه به مسافت‌های مشخص شده روی نمودار، برای هریک از متحرک‌ها در این مسافت‌ها رابطهٔ $|\Delta x|=|v|\Delta t$ را می‌نویسیم:



$$A:\begin{cases}K=|v_A|\times t\\ L=|v_A|\times(۲۵)\end{cases}$$

$$B:\begin{cases}K=|v_B|\times ۱۶\\ L=|v_B|\times t\end{cases}$$

گام دوم: نسبت $\frac{K}{L}$ را برای هر دو متحرک محاسبه می‌کنیم و آنها را با هم برابر قرار می‌دهیم تا t به دست بیاید:

$$\begin{cases}A:\frac{K}{L}=\frac{t}{۲۵}\\ B:\frac{K}{L}=\frac{۱۶}{t}\end{cases}\Rightarrow\frac{t}{۲۵}=\frac{۱۶}{t}\Rightarrow t=۴\times۵=۲۰s$$

گام سوم: با توجه به اینکه تندی متحرک A برابر $۴m/s$ است، K و L و پس از آن $|v_B|$ را تعیین می‌کنیم:

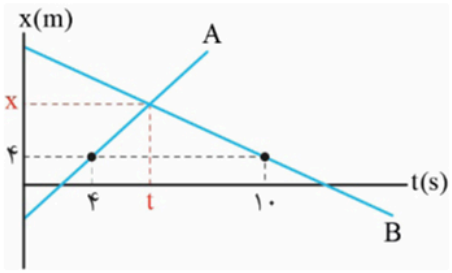
$$\begin{cases}K=|v_A|\times t\\ L=|v_A|\times ۲۵\end{cases}\xrightarrow[t=۲۰s]{|v_A|=۴m/s}\begin{cases}K=۴\times۲۰=۸۰m\\ L=۴\times۲۵=۱۰۰m\end{cases}$$

$$K=|v_B|\times ۱۶\Rightarrow ۸۰=|v_B|\times ۱۶\Rightarrow v_B=۵m/s$$

گام چهارم: در $t=۰$ فاصلهٔ دو متحرک برابر $K+L=۱۸۰m$ است. با توجه به تندی متحرک‌ها هر ثانیه تا قبل از رسیدن دو متحرک به هم به اندازهٔ $(|v_A|+|v_B|)\times۱=۹m$ از فاصلهٔ آنها کم می‌شود. پس فاصلهٔ دو متحرک در $t=۱s$ برابر $۱۸۰-۹=۱۷۱m$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۸۳ **گام اوّل:** مکان به هم رسیدن دو متحرّک را x و زمان آن را t در نظر می‌گیریم. چون اندازهٔ شیب خط A (تندی A) ۲ برابر اندازهٔ شیب خط B (تندی B) است، پس t برابر است با:



$$|v_A|=۲|v_B|$$

$$\left|\frac{x-۴}{t-۴}\right|=۲\left|\frac{۴-x}{۱۰-t}\right|\Rightarrow\frac{(x-۴)}{t-۴}=۲\frac{(x-۴)}{۱۰-t}\Rightarrow ۲t-۸=۱۰-t\Rightarrow t=۶s$$

گام دوم: اگر تندی B را v بگیریم، تندی A برابر ۲v است. فاصلهٔ دو متحرّک در هر ثانیه به اندازهٔ ۳v تغییر می‌کند. چون در لحظهٔ $t=۶s$ دو متحرّک در یک مکان هستند. پس فاصلهٔ دو متحرّک در $t=۳s$ و $t=۱۲s$ به ترتیب برابر است با:

$$\begin{cases}\ell_{۳s}=۳v(۶-۳)=۹v\\ \ell_{۱۲s}=۳v(۱۲-۶)=۱۸v\end{cases}$$

گام سوم: نسبت خواسته شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\ell_{۱۲s}}{\ell_{۳s}}=\frac{۱۸v}{۹v}=۲$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۸۴

روش اوّل:

گام اوّل: برای فاصلهٔ BC، معادلهٔ مکان ـ زمان را می‌نویسیم تا سرعت متحرّک در مکان B به دست بیاید:

$$\Delta X_{BC} = \frac{1}{2}at^2 + v_{0B}t$$

$$60 = \frac{1}{2}\times 4\times 3^2 + v_{0B}\times 3 \rightarrow v_{0B} = 14\frac{m}{s}$$

گام دوم: برای قسمت AB، معادلهٔ سرعت ـ زمان را می‌نویسیم تا مدّت زمان حرکت در این قسمت مشخّص شود:

$$v_B = at + v_{0A} \qquad 14 = 4t_{AB} + 0 \rightarrow t_{AB} = 3/5\,s$$

گام سوم: معادله مکان ـ زمان را برای کل مسیر (AD) می‌نویسیم تا زمان طی کردن مسیر AD تعیین شود.

$$\Delta X_{AD} = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \qquad 162 = \frac{1}{2}\times 4 t_{AD}^2 + 0 \rightarrow t = 9s$$

در نهایت زمان طی کردن قسمت CD به‌دست می‌آید:

$$t_{CD} = 9 - (3/5 + 3) = 2/5\,s$$

روش دوم:

گام اوّل: سرعت متوسط در مسیر BC را به‌دست می‌آوریم.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{60}{3} = 20\frac{m}{s}$$

گام دوم: با توجّه به نکتهٔ زیر سرعت در وسط بازهٔ زمانی ۳s مسیر BC به‌دست می‌آید. و با توجّه به شتاب سرعت متحرّک در نقاط B و C به‌دست می‌آید.

$$v_{\text{وسط بازه BC}} = 20\frac{m}{s} \xrightarrow{\frac{\Delta t_{BC}}{2} = \frac{3}{2} = 1/5\,s} \begin{cases} v_B = v_{\text{وسط بازه}} - a\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \\ v_C = v_{\text{وسط بازه}} + a\left(\frac{\Delta t}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_B = 20 - 4\times 1/5 = 14\,m/s \\ v_C = 20 + 4\times 1/5 = 26\,m/s \end{cases}$$

گام سوم: با توجّه به سرعت متحرّک در نقطهٔ C، مدّت حرکت از AC را به‌دست می‌آوریم و مدّت حرکت از A تا D را نیز با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان تعیین می‌کنیم:

$$v_C = at_{AC} + v_0 \Rightarrow 26 = 4\times t_{AC} \Rightarrow t_{AC} = 6/5\,s$$

$$\Delta x_{AD} = \frac{1}{2}at_{AD}^2 + v_A t \Rightarrow 162 = \frac{1}{2}(4)t_{AD} \Rightarrow t_{AD} = 9s$$

حالا مدّت حرکت CD را تعیین می‌کنیم:

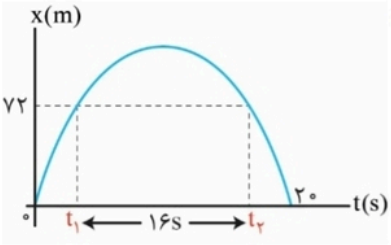
$$t_{CD} = t_{AD} - t_{AC} = 9 - 6/5 = 2/5\,s$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

گام اوّل: در حرکت با شـــتاب ثابت در حالتی که مانند شـــکل متحرّک مسیری را کند شونده طی کند و پس از توقف حرکت به‌طور تند شونده ادامه یابد. مدّت زمان طی نمودن هر جابه‌جایی در رفت و برگشت مساوی است. بنابراین:



$$t_1 = \frac{20-16}{2} = 2s$$

$$t_2 = 20-2 = 18s$$

گام دوم: رابطهٔ مکان ـ زمان را برای بازه‌های زمانی $(0,2s)$ و $(0,20s)$ می‌نویسیم تا سرعت اوّلیه و شتاب به‌دست بیایند:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow \begin{cases} 72 = \frac{1}{2}a(2)^2 + v_0(2) + 0 \\ 0 = \frac{1}{2}a(20)^2 + v_0(20) + 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = 40\,m/s \\ a = -4\,m/s^2 \end{cases}$$

گام سوم: تندی متحرّک در لحظهٔ تغییر جهت (رأس نمودار) صفر است. طبق معادلهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی متحرّک از $t=0$ تا لحظهٔ تغییر جهت را به‌دست می‌آوریم و دو برابر آن را به عنوان مسافت طی شده در ۲۰ ثانیه نخست به‌دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0^2 - 40^2 = 2(-4)\Delta x_{(0,10s)} \Rightarrow \Delta x_{(0/10s)} = 200m$$

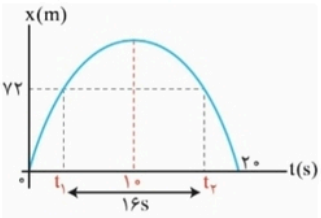
$$\ell_{(0,20s)} = 2\left|\Delta x_{(0,10s)}\right| = 400m$$

روش دوم:

گام اوّل: طبق تقارن سهمی، لحظهٔ تغییر جهت متحرّک (رأس سهمی) برابر است با:

$$t_{\text{تغییر جهت}} = \frac{0+20}{2} = 10s$$

گام دوم: طبق تقارن سهمی لحظهٔ t_2 را به‌دست می‌آوریم:



$$t_2 = 10 + \frac{16}{2} = 18s$$

گام سوم: معادله مکان ـ زمان را دو بار در بازه‌های $(10s,18s)$ و $(10s,20s)$ می‌نویسیم تا جابه‌جایی در ۱۰ ثانیهٔ دوم به‌دست بیاید:

$$\Delta x = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v\Delta t \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_{(10s,20s)} = \frac{1}{2}a(10)^2 + v_{10s}(10) \\ \Delta x_{(10,18s)} = \frac{1}{2}a(8)^2 + v_{10s}(8) \end{cases}$$

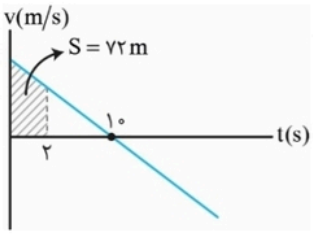
$$\xrightarrow[\text{تقسیم دو رابطه به هم}]{\Delta x(10s,18s)=\Delta x(10s,20s)+72} \frac{\Delta x_{(10s,20s)}}{\Delta x_{(10s,20s)}+72} = \frac{100}{64} \Rightarrow \Delta x_{(10s,20s)} = -200m$$

بنابراین مسافت طی شده در ۲۰ ثانیهٔ نخست برابر است با:

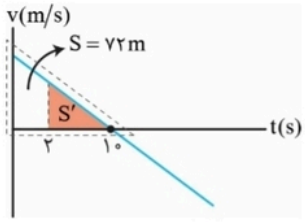
$$\ell_{(0,20s)} = 2\left|\Delta x_{(10s,0s)}\right| = 2\times 200 = 400m$$

روش سوم:

گام اوّل: نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم. با توجّه به تقارن سهمی رأس نمودار $t=10s$ است و لحظه‌هایی که متحرّک در مکان $x=72m$ است، برابرند با: $t_1 = t - \frac{16}{2} = 10-8 = 2s$ و $t_2 = t + \frac{16}{2} = 10+8 = 18s$. جابه‌جایی متحرّک در $(0,2s)$ برابر $72m$ است.پس نمودار $(v-t)$ به‌صورت شکل روبه‌رو است:



گام دوم: بین دو مثلث مشخّص شده تشابه را می‌نویسیم تا S' به‌دست بیاید:



$$\frac{S'}{S'+S} = \left(\frac{10-2}{10}\right)^2 \Rightarrow \frac{S'}{S'+72} = \frac{16}{25} \Rightarrow 9S' = 16\times 72 \Rightarrow S' = 128m$$

گام سوم: مسافت در ۲۰ ثانیهٔ نخست ۲ برابر اندازهٔ جابه‌جایی در ۱۰ ثانیهٔ نخست است، پس:

$$\ell = 2\left|\Delta x_{(0s,10s)}\right| = 2(S+S') = 2(72+128) = 400$$

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

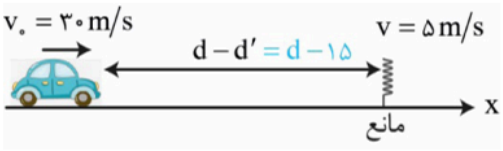
www.MrKonkor.com

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۸۶ **گام اوّل:** جهت محور x را جهت مثبت فرض می‌کنیم. مسافت طی شده در مدّت زمان واکنش (d') برای هر حالت را تعیین می‌کنیم:

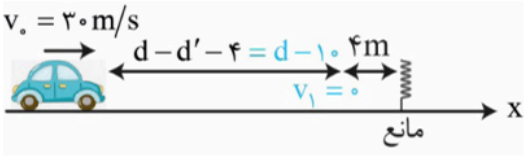
$$\begin{cases} d'_1 = v\Delta t_1 = ۳۰\times ۰/۵ = ۱۵\,m \\ d'_2 = v\Delta t_2 = ۳۰\times ۰/۲ = ۶\,m \end{cases}$$

گام دوم: معادلهٔ مستقل از زمان را برای قسمت ترمز گرفتن هر یک از دو حالت می‌نویسیم:



$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

$$۵^2 - ۳۰^2 = 2a(d-۱۵)$$



$$۰^2 - ۳۰^2 = 2a(d-۱۰)$$

با تقسیم دو رابطه به هم d و با جایگذاری آن در یکی از دو معادله a را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{-۸۷۵}{-۹۰۰} = \frac{d-۱۵}{d-۱۰} \Rightarrow \frac{۳۵}{۳۶} = \frac{d-۱۵}{d-۱۰} \Rightarrow d = ۱۹۰\,m\,,\ a = -۲/۵\,\frac{m}{s^2}$$

گام سوم: مدّت حرکت در حالت دوم را به‌دست می‌آوریم:

$$t_{(۲)} = t_{(۲)\text{واکنش}} + t_{(۲)\text{ترمز}} = ۰/۲ + \frac{\Delta v}{a} = ۰/۲ + \frac{(-۳۰)}{(-۲/۵)} = ۱۲/۲\,s$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۸۷

روش اوّل:

گام اوّل: چون شتاب متحرّک در بازهٔ Δt_2 صفر است تندی متحرّک تغییر نمی‌کند و تندی آخر بازهٔ Δt_1 (v_1) با تندی اوّل بازه Δt_3 برابر است. رابطهٔ مستقل از زمان را برای بازهٔ Δt_3 می‌نویسیم تا v_1 به‌دست بیاید.

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \rightarrow 0 - v_1^2 = 2(-4)(50) \rightarrow v_1 = \pm 20\frac{m}{s}$$

پاسخ منفی برای v_1 قابل قبول نیست چون متحرّک در جهت محور x در حرکت است.

گام دوم: در بازهٔ Δt_2، سرعت متحرّک ثابت است. مدّت زمان حرکت متحرّک در این بازه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x = vt_2 \rightarrow 200 = 20t_2 \rightarrow t_2 = 10s$$

مدّت زمان Δt_3 را با استفاده از رابطهٔ شتاب متحرّک حساب می‌کنیم:

$$a_3 = \frac{\Delta v_3}{\Delta t_3} \Rightarrow -4 = \frac{0-20}{\Delta t_3} \Rightarrow \Delta t_3 = 5s$$

گام سوم: با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان در بازهٔ Δt_1، سرعت اوّلیه متحرّک و پس از مدّت Δt_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 20^2 - v_0^2 = 2(2)\times 75 \Rightarrow v_0 = 10m/s$$

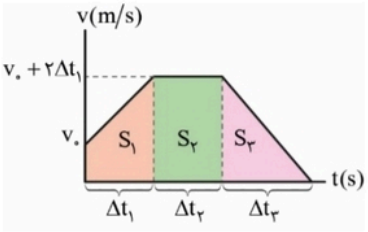
$$a_1 = \frac{\Delta V_1}{\Delta t_1} \Rightarrow 2 = \frac{20-10}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = 5s$$

گام چهارم: حالا شتاب متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$av = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-10}{\Delta t_1 + \Delta t_1 + \Delta t_3} = \frac{-10}{5+10+5} = -0/5\frac{m}{s^2}$$

روش دوم:

گام اوّل: نمودار سرعت ـ زمان متحرّک را رسم می‌کنیم.



$$S_1 = 75, S_2 = 200, S_3 = 50$$

گام دوم: برای هر یک از مساحت‌ها، رابطهٔ آنها را می‌نویسیم تا مدّت زمان هر قسمت به دست بیاید. علاوه بر این رابطه‌ها چون شتاب در قسمت آخر $-4\frac{m}{s^2}$ است پس $\frac{-(v_0 + 2\Delta t_1)}{\Delta t_3} = -4$ است. پس:

$$\begin{cases} S_1 = \left(\frac{2v_0 + 2\Delta t_1}{2}\right)\Delta t_1 \\ S_2 = (v_0 + 2\Delta t_1)\Delta t^2 \\ S_3 = \left(\frac{v_0 + 2\Delta t_1}{2}\right)\Delta t_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 75 = \left(\frac{v_0 + (v_0 + 2\Delta t_1)}{2}\right)\Delta t_1 \\ 200 = 4\Delta t_3 \times \Delta t_2 \\ 50 = 2\Delta t_3 \times \Delta t_3 \Rightarrow \Delta t_3 = 5(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 200 = 4\times 5\times \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = 10s$$

برای محاسبهٔ v_0 ابتدا Δt_1 را برحسب v_0 تعیین می‌کنیم و آن را در معادلهٔ S_1 قرار می‌دهیم:

$$v_0 + 2\Delta t_1 = 4\Delta t_3 = 20 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{20 - v_0}{2}$$

$$75 = \left(\frac{v_0 + 20}{2}\right)\Delta t_1 \Rightarrow 75 = \left(\frac{v_0 + 20}{2}\right)\left(\frac{20 - v_0}{2}\right) \Rightarrow 300 = 400 - v_0^2 \Rightarrow v_0 = 10\frac{m}{s}, \Delta t_1 = 5s$$

گام سوم: شتاب متوسط را در کل حرکت تعیین می‌کنیم:

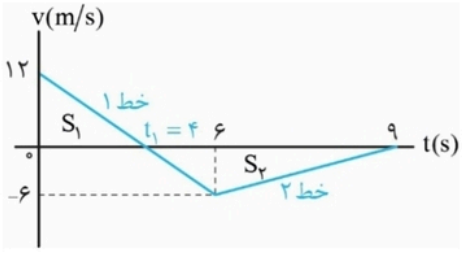
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0-10}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3} = \frac{-10}{5+10+5} = -0/5\frac{m}{s^2}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۸۸

مسیر متحرّک را روی محور x رسم کنیم.

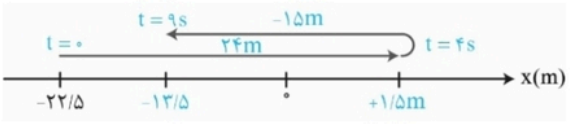


$$\text{شیب خط ۱} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۶ - ۱۲}{۶ - ۰} = -۳\frac{m}{s^۲}$$

$$-۳ = \frac{۰ - ۱۲}{t_۱ - ۰} \rightarrow t_۱ = ۴s$$

مساحت زیر نمودار برابر جابه‌جایی است داریم:

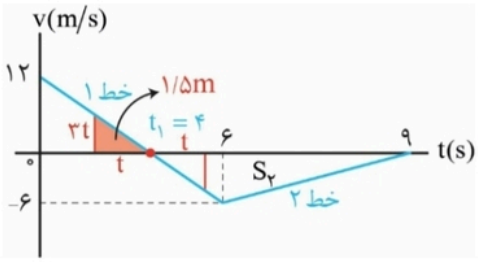
$$S_۱ = \frac{۱۲ \times ۴}{۲} = ۲۴m \qquad \Delta x_{۰-۴} = ۲۴m$$



$$S_۲ = \frac{-۶(۹ - ۴)}{۲} = -۱۵m \qquad \Delta x_{۴-۹} = -۱۵m$$

الف همان‌طور که مسیر حرکت نشان می‌دهد متحرّک ۲ بار از مبدأ می‌گذرد. (درست)

ب وقتی متحرّک در مکان‌های بزرگ‌تر از صفر در حرکت است بردار مکان آن مثبت است. با توجّه به مسیر حرکت از صفر تا $x = ۱/۵m$ و از $x = ۱/۵m$ تا صفر بردار مکان مثبت است زمان این فاصله‌ها را از روی نمودار سرعت ـ زمان حساب می‌کنیم در لحظه ۴s سرعت صفر شد، پس به اندازهٔ $۱/۵m$ جابه‌جایی جدا می‌کنیم.



$$S = \frac{۳t \times t}{۲}$$

$$۱/۵ = \frac{۳t^۲}{۲} \rightarrow t = ۱s$$

با تشابه می‌توان نتیجه گرفت ۱s هم بعد از لحظه $t = ۴$ جابه‌جایی دارای اندازه $۱/۵m$ است پس جمعاً ۲s بردار مکان مثبت و در جهت محور x است. (درست)

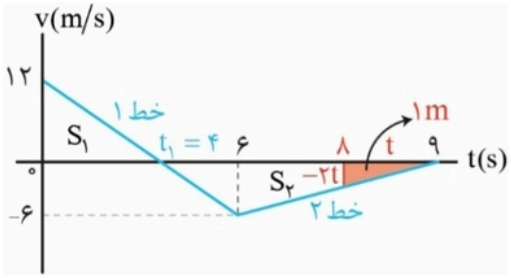
پ شتاب متوسط از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ محاسبه می‌شود و منفی است. (نادرست)

$$a_{av} = \frac{۰ - ۱۲}{۹ - ۰} = -\frac{۴}{۳}\frac{m}{s}$$

ت با توجّه به مسیر حرکت متحرّک دو بار از مکان $x = -۱۲/۵m$ عبور می‌کند بار اوّل در جهت محور x و بار دوم در خلاف محور x که مدّنظر ما در خلاف یعنی بار دوم است.



از مکان $x = -۱۲/۵m$ تا مکان $x = -۱۳/۵m$ جابه‌جایی برابر با $\Delta x = -۱m$ است این جابه‌جایی را به‌صورت مساحت از روی نمودار سرعت ـ زمان جدا می‌کنیم تا لحظه مورد نظر محاسبه شود.



$$\text{شیب خط ۲} = \frac{۰ - (-۶)}{۹ - ۶} = ۲\frac{m}{s^۲}$$

$$S = \frac{-۲t \times t}{۲} = -۱$$

$$t = ۱s$$

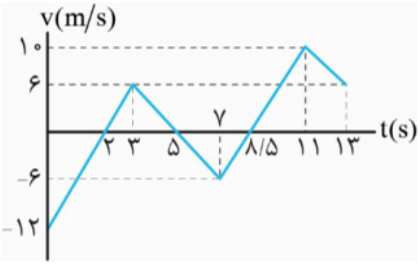
یعنی لحظه $t = ۸s$ این اتفاق می‌افتد.

$$\text{شیب} = ۲ = \frac{۰ - v}{۹ - ۸} \rightarrow v = ۲\frac{m}{s}$$

به این ترتیب گزاره پ (درست) است.

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۸۹ ابتدا نمودار سرعت ـ زمان متحرّک را رسم می‌کنیم.



حالا به بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱ درست، در بازه‌های $(۲s, ۳s)$، $(۵s, ۷s)$ و $(۸/۵s, ۱۱s)$ متحرّک به‌صورت تندشونده حرکت کرده است. یعنی بردارهای سرعت و شتاب هم جهت‌اند. پس به مدّت $۵/۵s$ بردارهای سرعت و شتاب هم جهت‌اند.

۲ درست، متحرّک در بازه‌های زمانی $(۰,۲s)$ و $(۳s, ۵s)$ و $(۷s, ۸/۵s)$ و $(۱۱s, ۱۳s)$ به‌صورت کند شونده حرکت کرده است. مجموع مساحت‌های زیر نمودار در این بازه‌ها همان مسافت طی شده است که برابر است با:

$$\ell = \left(\frac{۱۲\times۲}{۲}\right)+\left(\frac{۶\times۲}{۲}\right)+\left(\frac{۶\times۱/۵}{۲}\right)+\left(\frac{(۱۰+۶)\times۲}{۲}\right)=۳۸/۵\,m$$

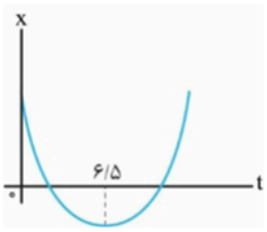
۳ نادرست، شتاب متوسط در بازهٔ $(۱s, ۱۰s)$ برابر است با:

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_{av}(۱s, ۱۰s)=\frac{v_{۱۰s}-v_{۱s}}{۱۰-۱}=\frac{۶-(-۶)}{۹}=\frac{۴}{۳}\frac{m}{s^۲}$$

۴ درست، چون در هر دو بازه نمودار $(v-t)$ با محور زمان تشکیل یک مثلث می‌دهد، تندی متوسط در هر دو بازه نصف ارتفاع مثلث‌ها یعنی $\frac{۶}{۲}=۳\frac{m}{s}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۰ **گام اوّل:** چون بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ با بازه زمانی $t_۳$ تا $t_۴$ برابر است (هر دو $۳s$ است) جابه‌جایی این دو بازه در حرکت با شتاب ثابت قرینه هم‌اند. در نتیجه حرکت ابتدا کند شونده و پس از توقف، حرکت تند شونده است و درست در وسط بازهٔ $t_۱=۲s$ تا $t_۴=۱۱s$ سرعت آن صفر می‌شود یعنی در لحظه $t=۶/۵s$.





گام دوم: با استفاده از رابطهٔ شتاب در بازهٔ $(۶/۵s, ۱۰s)$، شتاب را به‌دست می‌آوریم و سپس سرعت اوّلیه را به‌دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{۱۰s}-v_{۶/۵}}{۱۰-۶/۵}=\frac{۱۰/۵-۰}{۳/۵}=۳\,m/s^۲$$

$$v_{۱۰s}=at+v_۰\Rightarrow ۱۰/۵=۳(۱۰)+v_۰\Rightarrow v_۰=-۱۹/۵\,m/s$$

گام سوم: با استفاده از معادله مکان ـ زمان، مکان اوّلیه متحرّک را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\xrightarrow{x_{۱۰s}=۱۰m}۱۰=\frac{۳}{۲}(۱۰)^۲-۱۹/۵(۱۰)+x_۰\Rightarrow x_۰=۵۵m$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۹۱ **گام اوّل:** به نکتهٔ زیر توجّه کنید:

نکته اگر دو متحرّک با شتاب‌های ثابت یا یک متحرّک شتاب ثابت و دیگری با سرعت ثابت در لحظهٔ $t=0$ از یک مکان عبور کنند و درلحظه t سرعت آنها با هم برابر شود، در لحظهٔ $2t$ دو متحرّک به هم می‌رسند. (اثبات به عهدهٔ خودتان. از سطح زیر نمودار $(v-t)$ می‌توانید برای اثبات ساده استفاده کنید).

با توجّه به نکته بالا دو متحرّک در $t'=2(4)=8s$ به هم می‌رسند.

گام دوم: اختلاف سرعت دو متحرّک در $t=8s$ را به‌دست می‌آوریم. چون در $t=0s$ اختلاف سرعت دو متحرّک برابر $30\frac{m}{s}$ است و در $t=4s$ سرعت آنها برابر شده است، در لحظهٔ $t=8s$ هم، اختلاف سرعت دو متحرّک برابر با $30\frac{m}{s}$ است. از لحظهٔ $t=8s$ به بعد سرعت دو متحرّک ثابت شده است. پس اختلاف سرعت آنها از $t=8s$ به بعد همان $30\frac{m}{s}$ می‌ماند. یعنی از $t=8s$ به بعد در هر ثانیه فاصلهٔ دو متحرّک $30m$ زیاد می‌شود. بنابراین $\Delta t=\frac{\Delta x}{v}=\frac{120}{30}=4s$ پس از رسیدن دو متحرّک به هم فاصلهٔ آنها به $120m$ می‌رسد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۲ **گام اوّل:** ابتدا شتاب متحرّک A را تعیین می‌کنیم. با قرینه کردن حرکت متحرّک A در ۴ ثانیهٔ نخست حرکت آن، داریم:

$$A:\Delta x_A=-\frac{1}{2}a_At^2+v_{4s}t\Rightarrow 8=-\frac{1}{2}a_A(4)^2\Rightarrow a_A=-1\frac{m}{s^2}$$

گام دوم: چون از $t=4s$ متحرّک‌های B و C حرکتشـــان بررسی می‌شود، پس معادلات هر سه متحرّک را از $t=4s$ به بعد می‌نویسیم. در $t=4s$ سرعت متحرّک A برابر صفر بوده است. پس:

$$\begin{cases} x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}^t+x_{0A} \\ x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{0B}t+x_{0B} \\ x_C=v_Ct+x_{0C} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x_A=-\frac{1}{2}t^2+8 \\ x_B=t^2 \\ x_C=vt \end{cases}$$

گام سوم: دو معادلهٔ A و B را با هم برابر قرار می‌دهیم تا زمان و مکان به هم رسیدن آنها به‌دست بیاید:

$$x_A=x_B\Rightarrow -\frac{t^2}{2}+8=t^2\Rightarrow \frac{3}{2}t^2=8\Rightarrow \begin{cases} t=\frac{4\sqrt{3}}{3}s \\ x=\frac{16}{3}m \end{cases}$$

گام چهارم: زمان و مکان به‌دست آمده را در معادلهٔ مکان ـ زمان متحرّک قرار می‌دهیم تا v به‌دست بیاید:

$$x_C=vt\Rightarrow \frac{16}{3}=v\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\Rightarrow v=\frac{4\sqrt{3}}{3}\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۹۳

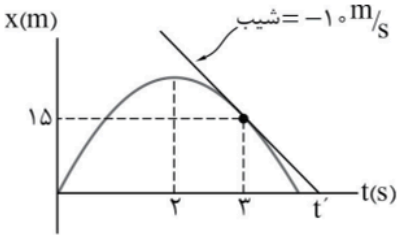
گام اول: شیب خط مماس بر نمودار $(x-t)$ برابر سرعت متحرک در آن لحظه است. سرعت متحرک در $t=۰$ را به دست می‌آوریم:

$$v_۰ = \frac{۴۰-۰}{۲-۰} = ۲۰ m/s$$

گام دوم: سرعت متحرک در $t=۳s$ که همان شیب خط مماس بر نمودار در $t=۳s$ است را به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار جابجایی متحرک در ۳ ثانیهٔ نخست حرکت برابر با ۱۵m است. طبق رابطهٔ $\Delta x = \frac{v+v_۰}{۲}\Delta t$، سرعت در $t=۳s$ برابر است با:

$$\Delta x = \frac{v+v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow ۱۵ = \frac{v_{۳s}+۲۰}{۲}\times ۳ \Rightarrow v_{۳s} = -۱۰\frac{m}{s}$$

گام سوم: با توجه به شکل زیر و اینکه $v_{۳s} = -۱۰\frac{m}{s}$ است، لحظهٔ t' که همان خواستهٔ سؤال است را به دست می‌آوریم:



$$-۱۰ = \frac{-۱۵}{t'-۳} \Rightarrow t' = ۴/۵s$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۴

گام اول: فرض می‌کنیم متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ با شتاب $-۶\frac{m}{s^۲}$ و در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا ۱۰s با شتاب $-۱\frac{m}{s^۲}$ حرکت کرده است. در این صورت تندی لحظهٔ $t_۱$ برابر v است و داریم:

$$v = at + v_۰ \rightarrow \begin{vmatrix} v = -۶t_۱ + ۴۰ \\ ۰ = -۱(۱۰-t_۱)+v \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۶s \\ v = ۴\frac{m}{s} \end{cases}$$

گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را می‌نویسیم و جابجایی متحرک در ۶ ثانیه نخست و بازهٔ (۶s,۱۰s) را به دست می‌آوریم و با جمع بین دو جابجایی، جابجایی ۱۰ ثانیهٔ نخست را به دست می‌آوریم:

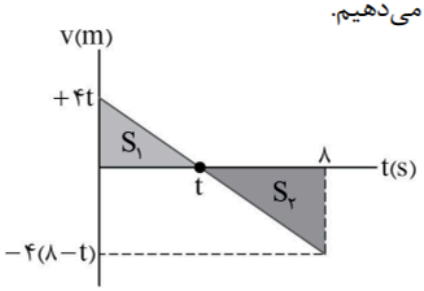
$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta x_۱ &= \frac{۱}{۲}(-۶)\times ۶^۲ + ۴۰\times ۶ = ۱۳۲m \\ \Delta x_۲ &= \frac{۱}{۲}(-۱)\times ۴^۲ + ۴\times ۴ = ۸m \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۱۳۲ + ۸ = ۱۴۰m$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

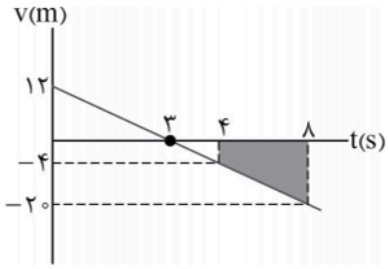
۱۹۵ **گام اول:** نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم. شیب نمودار $-۴\frac{m}{s^۲}$ است و چون متحرک از ابتدا در جهت محور حرکت کرده است، سرعت اولیه مثبت است. مساحت سطح زیر نمودار در ۸ ثانیهٔ نخست را برابر ۶۸m قرار می‌دهیم.



$$S_۱ + S_۲ = ۶۸ \Rightarrow ۲t^۲ + ۲(۸-t)^۲ = ۶۸$$
$$\Rightarrow ۴t^۲ - ۳۲t + ۱۲۸ = ۶۸ \Rightarrow t^۲ - ۸t + ۱۵ = ۰$$
$$\Rightarrow t = ۳s \quad \text{و} \quad t = ۵s$$

با توجه به نمودار مکان ـ زمان $t = ۳s$ قابل قبول است. پس معادلهٔ سرعت ـ زمان به صورت $v = -۴t + ۱۲$ است.

گام دوم: نمودار سرعت ـ زمان را به طور کامل رسم می‌کنیم و جابجایی متحرک در بازهٔ $(۴s, ۸s)$ و سپس مکان متحرک در $t = ۴s$ را به دست می‌آوریم:



$$\Delta x_{(۴s,۸s)} = \frac{-۴-۲۰}{۲} \times ۴ = -۴۸m$$
$$x_{۸s} - x_{۴s} = -۴۸ \Rightarrow ۰ - x_{۴s} = -۴۸ \Rightarrow x_{۴s} = ۴۸m$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۱۹۶ **گام اول:** جهت محور x را جهت حرکت هر دو متحرک در نظر می‌گیریم و معادله حرکت هر دو متحرک را می‌نویسیم. فرض می‌کنیم در $t = ۰$ کامیون در $x = ۰$ است.



$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$$

معادله حرکت خودرو: $x_{\text{خودرو}} = \frac{۱}{۲} \times ۴t^۲ + ۰ + ۴۰ = ۲t^۲ + ۴۰$

معادله حرکت کامیون: $x_{\text{کامیون}} = \frac{۱}{۲}at^۲ + ۲۰t + ۰ = \frac{۱}{۲}at^۲ + ۲۰t$

گام دوم: برای آنکه کامیون به اتومبیل برسد باید معادلهٔ $x_{\text{کامیون}} = x_{\text{خودرو}}$ جواب داشته باشد. پس:

$$x_{\text{خودرو}} = x_{\text{کامیون}} \Rightarrow ۲t^۲ + ۴۰ = \frac{۱}{۲}at^۲ + ۲۰t \Rightarrow (۲ - \frac{۱}{۲}a)t^۲ - ۲۰t + ۴۰ = ۰$$

$$\Delta \geq ۰ \Rightarrow ۴۰۰ - ۴(۴۰)(۲ - \frac{۱}{۲}a) \geq ۰ \Rightarrow ۴۰۰ - ۳۲۰ + ۸۰a \geq ۰ \Rightarrow a \geq -۱\frac{m}{s^۲}$$

بنابراین به ازای ۳ مقدار از شتاب‌های داده شده کامیون به خودرو می‌رسد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۱۹۷ مسافت طی شده توسط خودرو در کل مسیر را ℓ و تندی متوسط آن در نصف دوم مسیر را v در نظر می‌گیریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{\ell}{\frac{\frac{\ell}{2}}{10}+\frac{\frac{\ell}{2}}{v}}=\frac{20v}{10+v}$$

مشخص است که عبارت $\frac{20v}{10+v}$ به ازای هیچ مقداری از v نمی‌تواند برابر ۲۰ یا بزرگ‌تر از آن باشد. پس فقط گزینه (۱) می‌تواند تندی متوسط خودرو در کل مسیر باشد.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹۸ **گام اول:** چون شتاب متوسط مخالف صفر است، سرعت لحظه‌های t_1 و t_2 متفاوت است و هر کدام روی یک خط قرار دارند. با توجه به نمودار، شیب خط که همان سرعت در لحظات t_1 و t_2 است را به دست می‌آوریم:

$$v_{t_1}=\text{شیب خط اول}=\frac{4}{2}=2\frac{m}{s}$$

$$v_{t_2}=\text{شیب خط دوم}=\frac{-4}{1}=-4\frac{m}{s}$$

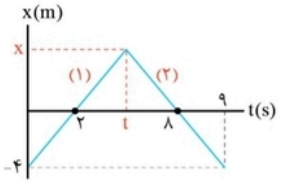
گام دوم: رابطهٔ شتاب متوسط را می‌نویسیم تا (t_2-t_1) را به دست بیاوریم.

$$a_{av}=\frac{\Delta V}{\Delta t}\Rightarrow -1/5=\frac{-4-2}{t_2-t_1}\Rightarrow t_2-t_1=4(s)$$

گام سوم: مکان و زمان تغییر جهت و همچنین مکان متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 را برحسب t_1 و t_2 تعیین می‌کنیم.

تشابه مثلث‌ها:

$$\begin{cases}\frac{x}{8-2}=\frac{x+4}{9-0}\Rightarrow x=8m\\ \frac{x-(-4)}{t}=2\Rightarrow\frac{12}{t}=2\Rightarrow t=6s\end{cases}$$



$$\begin{cases}(1)\ \text{معادله خط}\ x=2t-4\Rightarrow x_{t_1}=2t_1-4\\ (2)\ \text{معادله خط}\ x=-4t+32\Rightarrow x_{t_2}=-4t_2+32\end{cases}$$

گام چهارم: مسافت طی شده را با توجه به مکان‌های به دست آمده در بالا به دست می‌آوریم و در معادلهٔ تندی متوسط قرار می‌دهیم تا یک رابطهٔ دیگر بین t_1 و t_2 را به دست بیاید:

$$\ell=(x-x_{t_1})+(x-x_{t_2})=2x-(x_{t_1}+x_{t_2})=16+4t_2-2t_1-28=4t_2-2t_1-12$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow 2/5=\frac{4t_2-2t_1-12}{4}\Rightarrow 2t_2-t_1=11$$

با توجه به دو معادلهٔ به دست آمده $t_1=3s$ و $t_2=7s$ است.

گام پنجم: حالا مکان متحرک در لحظه‌های t_1 و t_2 را تعیین می‌کنیم و سرعت متوسط در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases}x_{t_1}=2t_1-4=2(3)-4=2m\\ x_{t_2}=-4t_2+32=-4(7)+32=4m\end{cases}\Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{4-2}{7-3}=0/5\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۱۹۹ **گام اول:** ابتدا سرعت متحرک در $t=0$ را به دست می‌آوریم. با توجه به نمودار سرعت متحرک در $t=2s$ برابر صفر است. پس:

$$v=at+v_0 \Rightarrow 0=2(2)+v_0 \Rightarrow v_0=-4\frac{m}{s}$$

گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک را می‌نویسیم. مکان اولیه متحرک را x_0 در نظر می‌گیریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow x=t^2-4t+x_0$$

گام سوم: با توجه به نمودار بیشترین فاصله از مکان اولیه متحرک در $t=2s$ یا در $t=6s$ است. (البته طبق شناخت حرکت شتاب ثابت مشخصه که در $t=6s$ است ولی باز هم $t=2s$ را چک می‌کنیم):

$$\begin{cases} x_{2s}=(2)^2-4(2)+x_0=-4+x_0 \Rightarrow \text{فاصله تا مکان اولیه}=4m \\ x_{6s}=(6)^2-4(6)+x_0=12+x_0 \Rightarrow \text{فاصله تا مکان اولیه}=12m \end{cases}$$

پس بیشترین فاصله از مکان اولیه در ۶ ثانیه نخست حرکت ۱۲ متر است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۰ **گام اول:** ابتدا سرعت متحرک را در نقطهٔ B به دست می‌آوریم و با استفاده از آن فاصلهٔ AB را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{BC}=\frac{1}{2}at^2+v_Bt \Rightarrow 175=\frac{1}{2}(2)(5)^2+v_B(5) \Rightarrow v_B=30\frac{m}{s}$$

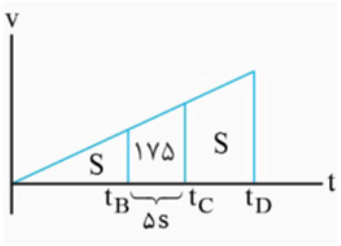
$$v_B^2-v_A^2=2a\Delta x_{AB} \Rightarrow 900-0=2(2)\Delta x_{AB} \Rightarrow \Delta x_{AB}=225m$$

گام دوم: کل طول مسیر حرکت برابر $\Delta x=2\overline{AB}+\overline{BC}=2(225)+175=625m$ است.

حالا مدت کل حرکت را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \Rightarrow 625=\frac{1}{2}\times 2\times t^2+0 \Rightarrow t=25(s)$$

روش دوم:



سرعت متوسط در طی مسیر BC برابر است با:

$$v_{av_{(BC)}}=\frac{175}{5}=25m/s$$

پس سرعت در وسط بازه زمانی BC برابر $25m/s$ است که این لحظه برابر است با:

$$v=at \Rightarrow 25=2\times\left(\frac{t_B+t_C}{2}\right) \Rightarrow t_B+t_C=35$$

و از طرفی $t_C-t_B=5s$ است، پس:

$$t_C=20s \ , \ t_B=15s$$

حال فاصله AB را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{AB}=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \Delta x_{AB}=\frac{1}{2}(2)(225)=225\ m$$

پس کل مسیر برابر است با:

$$\Delta x_{AD}=225+175+225=625\ m$$

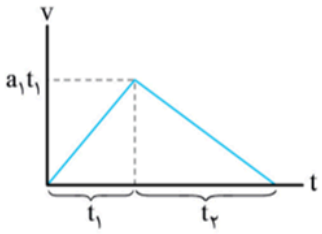
و زمان رسیدن به D برابر است با:

$$\Delta x_{AD}=\frac{1}{2}at_D^2 \Rightarrow 625=\frac{1}{2}(2)t_D^2 \Rightarrow t_D^2=625 \Rightarrow t_D=25\ s$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۰۱ نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم. با توجه به شتاب قسمت اول حرکت، بیشینهٔ سرعت متحرک برابر a_1t_1 است. (t_1 مدت حرکت با شتاب a_1 است.) چون شتاب حرکت در قسمت دوم برابر a_2 است، مدت t_2 برحسب t_1 برابر است با:



$$a_2=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow a_2=\frac{0-a_1t_1}{t_2}\Rightarrow t_2=\frac{-a_1}{a_2}t_1$$

حالا مساحت سطح زیر نمودار را برابر d قرار می‌دهیم تا زمان t_1 به دست بیاید:

$$S=d\Rightarrow\frac{a_1t_1(t_1+t_2)}{2}=d\Rightarrow\frac{a_1t_1(t_1-\frac{a_1}{a_2}t_1)}{2}=d\Rightarrow t_1^2(a_1-\frac{a_1^2}{a_2})=2d\ \Rightarrow\ t_1=\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\frac{2d}{(a_2-a_1)}}$$

حالا کل زمان حرکت را به دست می‌آوریم:

$$t=t_1+t_2=t_1+(\frac{-a_1}{a_2}t_1)=t_1(1-\frac{a_1}{a_2})=t_1(\frac{a_2-a_1}{a_2})\Rightarrow t=\sqrt{\frac{a_2}{a_1}\frac{2d}{(a_2-a_1)}}\times(\frac{a_2-a_1}{a_2})=\sqrt{\frac{2(a_2-a_1)d}{a_1a_2}}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۰۲ **گام اول:** ابتدا مسافت توقف اتومبیل‌ها را پس از ترمز گرفتن اتومبیل (۱) به دست می‌آوریم. با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان این مسافت را حساب می‌کنیم. فقط توجه کنید که ماشین (۲)، یک ثانیه هم با سرعت ثابت حرکت کرده است.

اتومبیل (۱) $v^2-v_0^2=2a\Delta x_1\Rightarrow 0-40^2=2(-2)\Delta x_1\Rightarrow|\Delta x_1|=400(m)$

اتومبیل (۲)
$$\begin{cases}|\Delta x_2|=|v_0|\Delta t=20\times1=20m & \text{مسافت سرعت ثابت:}\\ |v^2-v_1^2|=2|a||\Delta x_2'|\Rightarrow|\Delta x_2'|=\frac{0-400}{2|a|}=\frac{200}{|a|} & \text{مسافت شتاب ثابت:}\end{cases}\Rightarrow|\Delta x_{(2)\,کل}|=20+\frac{200}{|a|}(m)$$

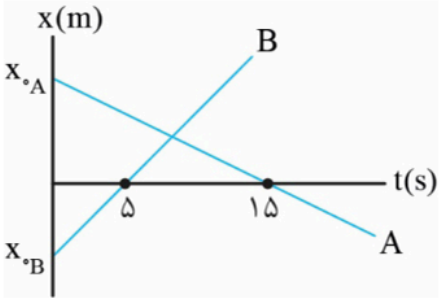
گام دوم: برای آنکه دو اتومبیل به هم برخورد نکنند، باید مجموع $|\Delta x|$های دو اتومبیل باید حداکثر برابر ۴۷۰m باشد. پس حداقل $|a|$ برابر است با:

$$|\Delta x_{(1)}|+|\Delta x_{(2)\,کل}|=470\Rightarrow400+20+\frac{200}{|a|}=470\Rightarrow|a|=4\frac{m}{s^2}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۰۳ مکان اولیه دو متحرک را $x_{\circ A}$ و $x_{\circ B}$ در نظر می‌گیریم. تندی دو متحرک را حساب می‌کنیم و طبق صورت تست، نسبت آن‌ها را برابر ۳ قرار می‌دهیم:



$$|v_B| = ۳|v_A| \Rightarrow \frac{|\circ - x_{\circ B}|}{۵} = ۳\frac{|\circ - x_{\circ A}|}{۱۵}$$

$$\Rightarrow |x_{\circ B}| = |x_{\circ A}| \xrightarrow{|x_{\circ A}|+|x_{\circ B}|=۳۰۰m} \begin{cases} x_{\circ A} = ۱۵۰m \\ x_{\circ B} = -۱۵۰m \end{cases}$$

حالا می‌توان معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را نوشت:

$$v_A = \frac{\circ - x_{\circ A}}{۱۵} = \frac{-۱۵۰}{۱۵} = -۱۰\frac{m}{s} \Rightarrow x_A = v_A t + x_{\circ A} = -۱۰t + ۱۵۰$$

$$v_B = \frac{\circ - x_{\circ B}}{۵} = +۳۰\frac{m}{s} \Rightarrow x_B = v_B t + x_{\circ B} = ۳۰t - ۱۵۰$$

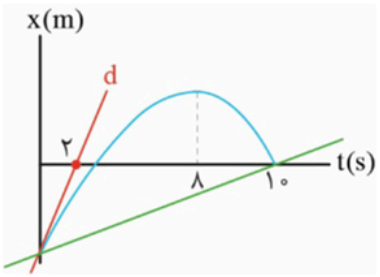
حالا اختلاف مکان در متحرک را برابر ۷۰۰m قرار می‌دهیم تا لحظهٔ مدنظر به دست بیاید. چون B جلوتر از A است پس:

$$x_B - x_A = ۷۰۰m \Rightarrow (۳۰t - ۱۵۰) - (-۱۰t + ۱۵۰) = ۷۰۰ \Rightarrow ۴۰t = ۱۰۰۰ \Rightarrow t = ۲۵s$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۴ متحرک در بازهٔ $(\circ, ۸s)$ در جهت محور x حرکت کرده است. سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۸s$ برابر صفر است، زیرا شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه برابر صفر است. باتوجه به شتاب متوسط متحرک در $(\circ, ۸s)$، سرعت اولیه متحرک را به دست می‌آوریم:

$$|a_{av(\circ,۸s)}| = ۲\frac{m}{s^۲} \Rightarrow \left|\frac{v_{۸s} - v_\circ}{۸ - \circ}\right| = ۲ \Rightarrow |v_\circ| = ۱۶\frac{m}{s} \xrightarrow{v_\circ > \circ} v_\circ = +۱۶\frac{m}{s}$$



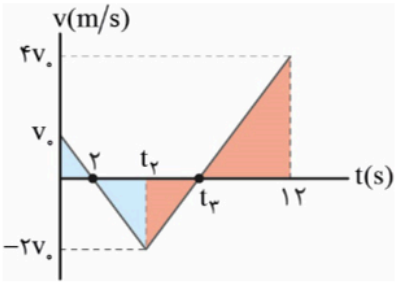
باتوجه به نمودار، شیب خط بین دو لحظهٔ ۰ و ۱۰s، $\frac{۱}{۵}$ برابر شیب خط d که همان سرعت اولیه است می‌باشد. پس:

$$v_{av(\circ,۱۰s)} = \frac{۱}{۵}v_\circ = \frac{۱۶}{۵}\frac{m}{s} = ۳/۲\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

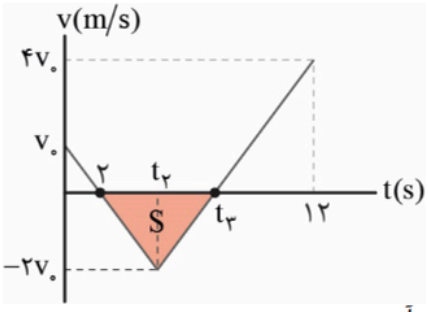
۲۰۵ ابتدا با استفاده از تشابه دو مثلث آبی رنگ، لحظهٔ $t_۲$ و با استفاده از تشابه دو مثلث قرمز رنگ لحظهٔ $t_۳$ را به دست می‌آوریم.



$$\frac{t_۲-۲}{۲}=\frac{۲v_۰}{v_۰}\Rightarrow t_۲=۶s$$

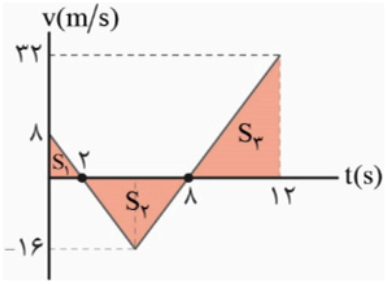
$$\frac{۱۲-t_۳}{t_۳-۶}=\frac{۴v_۰}{۲v_۰}\Rightarrow t_۳=۸s$$

هنگامی‌که نمودار محور زمان را قطع می‌کند، متحرک تغییر جهت داده است. پس متحرک در لحظه‌های $t_۳=۸s,۲s$ تغییر جهت داده است. مساحت محصور بین نمودار و محور زمان در این بازه برابر $۴۸m$ است. بنابراین $v_۰$ برابر است با:



$$S=۴۸m\Rightarrow\frac{۲v_۰\times(۸-۲)}{۲}=۴۸\Rightarrow v_۰=۸\frac{m}{s}$$

با مشخص شدن $v_۰$، مساحت محصور بین نمودار و محور زمان را در بازهٔ $(۰,۱۲s)$ به دست می‌آوریم:



$$\ell=S_۱+S_۲+S_۳=\frac{۲\times۸}{۲}+۴۸+\frac{۴\times۳۲}{۲}=۱۲۰m$$

حالا تندی متوسط در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۱۲۰}{۱۲}=۱۰\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۶ ابتدا با کمک ریشه‌ها، معادله مکان – زمان را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix}x=A(t-۱)(t-۵)\\x_۰=-۱۰m\end{matrix}\right\}A=-۲\Rightarrow x=-۲t^۲+۱۲t-۱۰$$

در لحظهٔ $t_۲$ مکان متحرک $-۲۴\ m$ است، پس:

$$-۲t_۲^۲+۱۲t_۲-۱۰=-۲۴\Rightarrow t_۲^۲-۶t_۲-۷=۰\Rightarrow t_۲=۷s$$

اکنون مکان متحرک در لحظه‌های $t_۱=۲s$ و $t'=۳s$ (لحظه تغییر جهت حرکت) را هم حساب می‌کنیم:

$$x_۱=-۲\times۲^۲+۱۲\times۲-۱۰=۶m \qquad x'=-۲\times۳^۲+۱۲\times۳-۱۰=۸m$$

مسافت طی شده در بازهٔ $(۲s,۷_s)$ برابر است با:

$$\ell=|\Delta x_{۲\to۳}|+|\Delta x_{۳\to۷}|=(۸-۶)+|-۲۴-۸|=۳۴m$$

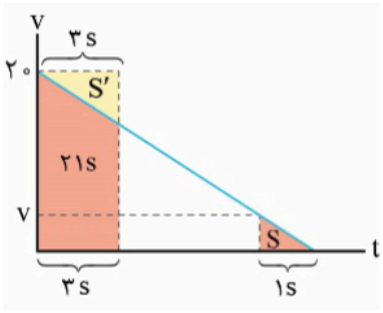
در نهایت تندی متوسط در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۳۴}{۵}=۶/۸\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۰۷ نمودار سرعت – زمان متحرک را رسم می‌کنیم. باتوجه به تشابه مثلث‌های رنگی، مساحت مثلث خط‌چین برحسب S را به دست می‌آوریم:



$$\frac{S'}{S}=(\frac{۳}{۱})^۲ \Rightarrow S'=۹S$$

با توجه به مستطیل ایجاد شده در نمودار در ۳ ثانیهٔ نخست، مقدار S به دست می‌آید.

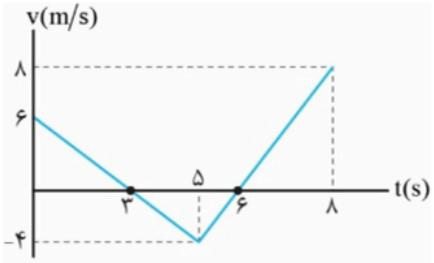
$$۲۱S+S'=۲۰\times۳ \Rightarrow ۳۰S=۶۰ \Rightarrow S=۲$$

حالا سرعت اتومبیل یک ثانیه قبل از توقف (V) و شتاب آن به دست می‌آید:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۰-۴}{۱}=-۴\frac{m}{s^۲} \qquad S=۲ \Rightarrow \frac{v\times۱}{۲}=۲ \Rightarrow v=۴\frac{m}{s}$$

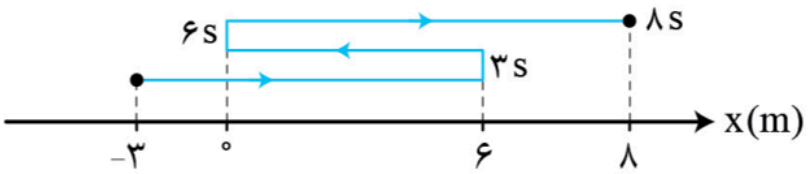
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۸ با توجه به سرعت اولیه و نمودار شتاب – زمان متحرک، نمودار سرعت – زمان را رسم می‌کنیم:



با توجه به مساحت سطح زیر نمودار، مسیر حرکت متحرک را روی محور رسم می‌کنیم.

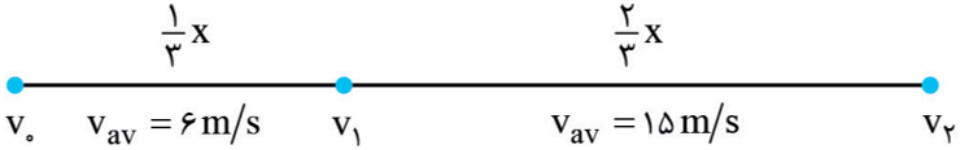
$$\Delta x_{(۰,۳s)}=\frac{۶\times۳}{۲}=۹m, \Delta x_{(۳s,۶)}=-\frac{۴\times۳}{۲}=-۶m, \Delta x_{(۶s,۸s)}=\frac{۸\times۲}{۲}=۸m$$



با توجه به نمودار مسیر حرکت، بردار مکان متحرک ۱ بار تغییر جهت داده است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰۹ سرعت متوسط برابر میانگین سرعت ابتدا و انتهای بازه است. پس:



$$۶=\frac{v_۰+v_۱}{۲} \Rightarrow v_۱=۱۲-v_۰ \qquad ۱۵=\frac{v_۱+v_۲}{۲} \Rightarrow v_۲=۳۰-v_۱=۳۰-(۱۲-v_۰)=۱۸+v_۰$$

رابطهٔ مستقل از زمان را برای $\frac{۱}{۳}$ ابتدای مسیر و کل مسیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} v_۱^۲-v_۰^۲=۲a(\frac{۱}{۳}x) \\ v_۲^۲-v_۰^۲=۲a(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (۱۲-v_۰)^۲-v_۰^۲=۲a\frac{x}{۳} \\ (۱۸+v_۰)^۲-v_۰^۲=۲ax \end{cases}$$

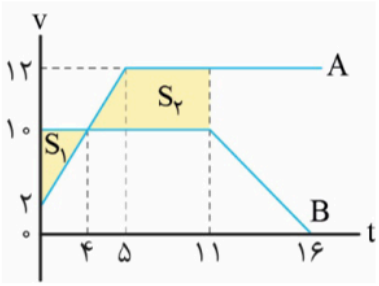
با تقسیم دو معادلهٔ به دست آمده، داریم:

$$\frac{۱۴۴-۲۴v_۰}{۳۲۴+۳۶v_۰}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow ۱۲-۲v_۰=۱۰ \Rightarrow v_۰=۱\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

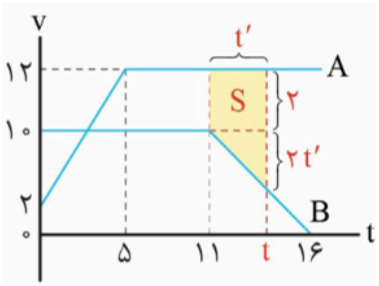
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۱۰ در ابتدای حرکت متحرک B، ۱۲ متر جلوتر از A قرار داشته است. برای اینکه متحرک A به B برسد باید لحظه‌ای را حساب کنیم که جابه‌جایی A، ۱۲ متر بیشتر از B باشد یعنی مساحت زیر نمودار A باید ۱۲m بیشتر از B باشد. باتوجه به نمودار تا لحظهٔ $t=11s$، حساب می‌کنیم که مساحت سطح زیر نمودار A چند متر از B کوچکتر یا بزرگتر است.



$$\begin{cases} S_۱ = \frac{۴\times ۸}{۲} = ۱۶\,m \\ S_۲ = \frac{۱۳\times ۲}{۲} = ۱۳\,m \end{cases} \Rightarrow \Delta x_A = \Delta x_B - ۳$$

بنابراین در لحظهٔ $t=11s$ فاصله دو متحرک برابر $۱۲+۳=۱۵m$ است. برای اینکه این دو به هم برسند از $t=11s$ به بعد متحرک A باید ۱۵m بیشتر از B حرکت کند. یعنی مساحت بین این دو باید ۱۵m شود.



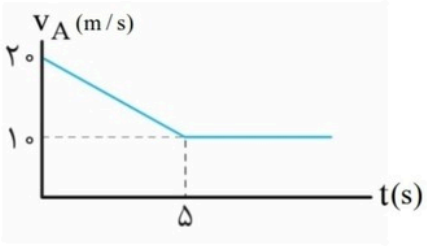
$$S=۱۵ \Rightarrow ۲t'+t'^{۲}=۱۵ \Rightarrow t'=۳(s) \Rightarrow t=۱۱+t'=۱۴s$$

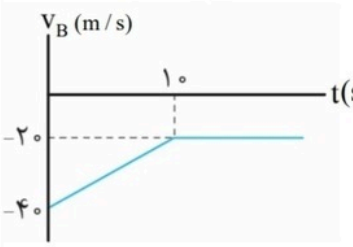
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۱۱

نمودار سرعت – زمان دو متحرک را رسم می‌کنیم.



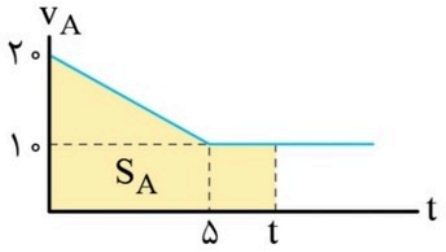


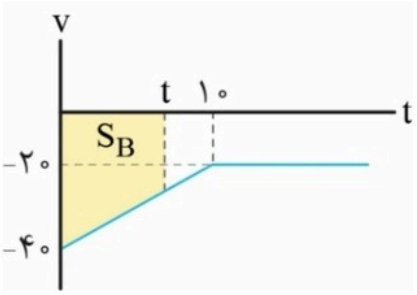
برای آنکه دو متحرک به هم برسند باید مجموع مسافت‌های طی شده آن‌ها برابر ۴۲۴m شود. ابتدا مسافت طی شده توسط دو متحرک تا $t=5s$ را حساب می‌کنیم:

$$\ell_{A(0,5s)}=\frac{20+10}{2}\times 5=75m \qquad \ell_{B(0,5s)}=\frac{40+30}{2}\times 5=175m$$

$$\ell_{A(0,5s)}+\ell_{B(0,5s)}=250m$$

باتوجه به ۲۵۰m طی شده، لحظه به هم رسیدن دو متحرک پس از $t=5s$ است. اگر مجموع مسافت طی شده تا $t=10s$ را حساب کنیم بیشتر از ۳۲۶ می‌شود. پس لحظهٔ به هم رسیدن دو متحرک در بازهٔ $(5s,10s)$ است. این لحظه را t در نظر می‌گیریم و مساحت سطح زیر نمودار دو متحرک تا این لحظه را حساب می‌کنیم و مجموع این دو مساحت را برابر ۳۲۶m قرار می‌دهیم تا لحظهٔ t به دست بیاید.





$$S_A=75+10(t-5)=25+10t \qquad S_B=\left|\frac{1}{2}at^2+v_0t\right|=-t^2+40t$$

$$S_A+S_B=424\Rightarrow 25+10t-t^2+40t=326\Rightarrow t^2-50t+301=0\Rightarrow (t-7)(t-43)=0\Rightarrow t=7(s)$$

حالا سرعت دو متحرک در $t=7s$ و نسبت آن‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\begin{cases} v_A=5\dfrac{m}{s} \\ v_B=2t-40\rightarrow v_B=2(7)-40=-26\dfrac{m}{s} \end{cases}\Rightarrow\left|\frac{v_B}{v_A}\right|=\frac{26}{5}=5/2$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۱۲ با استفاده از رابطهٔ شتاب متوسط، سرعت متحرک در $t=۱۲s$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av}=\frac{\Delta V}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{v_{۱۲s}-v_{۰}}{۱۲-۰}\Rightarrow ۲۴=v_{۱۲s}-(-۴)\Rightarrow v_{۱۲s}=۲۰\frac{m}{s}$$

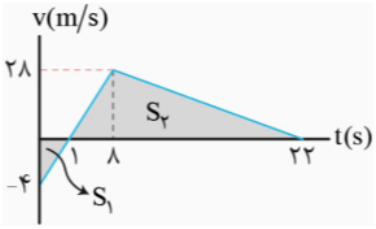
باتوجه به اینکه ۱۲s روی خط دوم نمودار قرار می‌گیرد، سرعت متحرک در $t=۸s$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av}(۸s,۲۲s)=a_{av}(۱۲s,۲۲s)\Rightarrow\frac{v_{۲۲s}-v_{۸s}}{۲۲-۸}=\frac{v_{۲۲s}-v_{۱۲}}{۲۲-۱۲}\Rightarrow\frac{۰-v_{۸s}}{۱۴}=\frac{۰-۲۰}{۱۰}\Rightarrow v_{۸s}=۲۸\frac{m}{s}$$

لحظهٔ تغییر جهت متحرک (t) را به دست می‌آوریم:

$$a_{av(۰,۸s)}=a_{av(۰,t)}\Rightarrow\frac{v_{۸s}-v_{۰}}{۸-۰}=\frac{۰-v_{۰}}{t-۰}\Rightarrow\frac{۲۸+۴}{۸}=\frac{۴}{t}\Rightarrow t=۱s$$

مساحت سطح زیر نمودار $(v-t)$ که برابر مسافت طی شده است را حساب می‌کنیم و تندی متوسط را با استفاده از آن به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases}\ell=s_{۱}+s_{۲}=\frac{۴\times۱}{۲}+\frac{۲۸\times۲۱}{۲}=۲+۲۹۴=۲۹۶m\\ s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۲۹۶}{۲۲}=\frac{۱۴۸}{۱۱}\frac{m}{s}\end{cases}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۳ چون تندی متحرک در دو لحظهٔ ۳s و ۶s با هم برابر است و طبق تقارن حرکت نسبت به لحظهٔ تغییرجهت، لحظه تغییر جهت متحرک که تندی متحرک در آن لحظه صفر است را به دست می‌آوریم:

$$t_{\text{تغییر جهت}}=\frac{۳+۶}{۲}=۴/۵s\ ,v_{۴/۵s}=۰$$

با استفاده از نمودار سرعت متوسط در ۱۲ ثانیه نخست حرکت را به دست می‌آوریم. سرعت متوسط در این بازه با سرعت وسط بازه برابر است. پس:

$$v_{av(۰,۱۲s)}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-۸۴-(-۱۲)}{۱۲-۰}=\frac{-۷۶}{۱۲}=-۶\frac{m}{s}=v_{۶s}$$

شتاب متحرک را به دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{۶s}-v_{۴/۵}}{۶-۴/۵}=\frac{-۶-۰}{۱/۵}=-۴\frac{m}{s^{۲}}$$

سرعت متحرک در $t=۱۰s$ را به دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow -۴=\frac{v_{۱۰s}-v_{۴/۵}}{۱۰-۴/۵}\Rightarrow -۴=\frac{v_{۱۰s}-۰}{۵/۵}\Rightarrow v_{۱۰s}=-۲۲\frac{m}{s}$$

تندی متحرک همان اندازهٔ سرعت متحرک است پس:

$$|v_{۱۰s}|=۲۲\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۱۴ ابتدا جابه‌جایی هر اتومبیل در مدت واکنش ترمز اتومبیل A را به دست می‌آوریم:

اتومبیل A، ۱۱ متر بیشتر از B جابه‌جا شده است.

$$\begin{cases}\Delta x_A = v_A \Delta t = ۲۰ \times ۱ = ۲۰ m \\ \Delta x_B = \frac{۱}{۲} a_B t^۲ + v_B t = -t^۲ + ۱۰t = -۱^۲ + ۱۰(۱) = ۹ m\end{cases}$$

بنابراین پس از ۱s از لحظهٔ ترمز گرفتن B، فاصلهٔ دو متحرک از ۲۳m به ۱۲m می‌رسد و سرعت متحرک B به $۸\frac{m}{s}$ می‌رسد.

حالا معادلهٔ مکان – زمان دو متحرک پس از این یک ثانیه را می‌نویسیم. مکان A را در این لحظه $x = ۰$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases}x_A = \frac{۱}{۲} a_A t^۲ + v_{۰A} t \\ x_B = \frac{۱}{۲} a_B t^۲ + v_B t + x_{۰B}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x_A = \frac{۱}{۲} a_A t^۲ + ۲۰t \\ x_B = -t^۲ + ۸t + ۱۲\end{cases}$$

حالا مکان دو متحرک را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow x_A - x_B = ۰ \Rightarrow (\frac{۱}{۲} a_A + ۱) t^۲ + ۱۲t - ۱۲ = ۰$$

برای آنکه دو متحرک به هم نرسند باید معادلهٔ بالا $\Delta < ۰$ داشته باشد، پس:

$$۱۲^۲ - ۴(-۱۲)(\frac{۱}{۲} a_A + ۱) < ۰ \Rightarrow ۱۲ + ۴(\frac{۱}{۲} a + ۱) < ۰ \Rightarrow ۳ + \frac{۱}{۲} a + ۱ < ۰$$

$$\frac{۱}{۲} a < -۴ \Rightarrow a < -۸ \frac{m}{s^۲} \Rightarrow |a| > ۸ \frac{m}{s^۲}$$

بنابراین حداقل اندازهٔ شتاب ترمز اتومبیل A باید $۸\frac{m}{s^۲}$ باشد تا برخورد بین دو اتومبیل رخ ندهد.

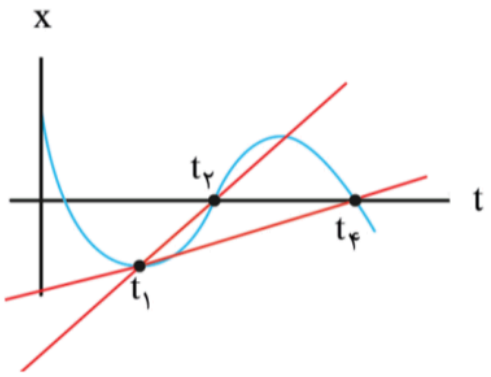
(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۱۵ به بررسی هریک از موارد می‌پردازیم:

الف درست است، زیرا با هربار عبور از مبدأ مکان جهت بردار مکان تغییر می‌کند. عبور از مبدأ مکان به معنای قطع کردن محور t در نمودار $x - t$ است.

ب نادرست است، اگرچه بزرگی تغییر سرعت در بازه‌های صفر تا $t_۱$ و صفر تا $t_۳$ برابر است ولی چون Δt در این دو بازه زمانی متفاوت است پس بزرگی شتاب متوسط هم متفاوت است.

پ درست است، همان‌طور که در شکل زیر مشخص است، بزرگی شیب پاره‌خط واصل از $t_۱$ تا $t_۲$ بیشتر از $t_۱$ تا $t_۴$ است. بزرگی شیب خط در نمودار مکان – زمان همان بزرگی سرعت متوسط است.



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۱۶ ابتدا مدت زمان حرکت خودروی (۱) از A تا B را حساب می‌کنیم که با T برابر است:

$$\Delta t_1 = \frac{|\Delta x|}{v_1} = \frac{۶۰۰}{۱۰} = ۶۰s \Rightarrow T = ۶۰(s)$$

با نوشتن معادله مکان- زمان هر خودرو و برابر قرار دادن آن‌ها با هم، مدت زمان حرکت خودروی (۲) از B تا A برابر $T - ۱۰ = ۵۰s$ است. پس تندی خودروی (۲) برابر است با:

$$v_2 = \frac{|\Delta x|}{\Delta t_2} = \frac{۶۰۰}{۵۰} = ۱۲\frac{m}{s}$$

لحظهٔ به هم رسیدن دو خودرو را حساب می‌کنیم:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow ۱۰t = -۱۲(t-۱۰) + ۶۰۰ \Rightarrow t = \frac{۳۶۰}{۱۱}(s)$$

خواستهٔ سؤال اختلاف T و t است، پس:

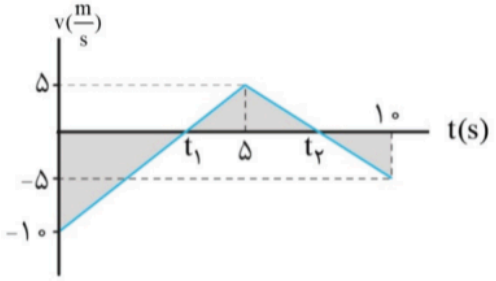
$$T - t = ۶۰ - \frac{۳۶۰}{۱۱} = \frac{۳۰۰}{۱۱}(s)$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۷ ابتدا سرعت اولیه را حساب می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \Rightarrow -۴ = v_0 + ۳\times۲ \Rightarrow v_0 = -۱۰\frac{m}{s}$$

اکنون نمودار سرعت – زمان متحرک را رسم می‌کنیم و از روی آن مسافت طی شده را پیدا می‌کنیم:



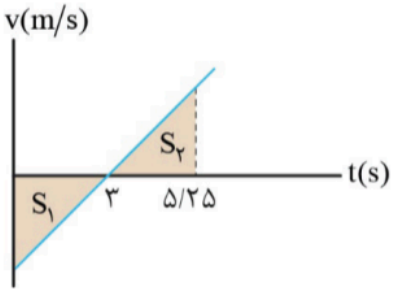
$$t_1 = \frac{۱۰}{۳}\ ,\ t_2 - ۵ = \frac{۵}{۲} \Rightarrow t_2 = \frac{۱۵}{۲}$$

$$\ell = \frac{۱۰\times\frac{۱۰}{۳}}{۲} + \frac{(\frac{۱۵}{۲} - \frac{۱۰}{۳})\times۵}{۲} + \frac{(۱۰ - \frac{۱۵}{۲})\times۵}{۲} = \frac{۱۰۰}{۶} + \frac{۱۲۵}{۱۲} + \frac{۲۵}{۴} = \frac{۴۰۰}{۱۲} = \frac{۱۰۰}{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۱۸ روش اول: نمودار سرعت – زمان جسم را رسم می‌کنیم. باتوجه به نمودار مکان – زمان، متحرک در $t=۳s$ تغییر جهت داده است و سرعت اولیه متحرک منفی است. پس نمودار سرعت – زمان متحرک به صورت شکل زیر است:



با توجه به تشابه دو مثلث رنگی، $\frac{S_۲}{S_۱}=(\frac{۲/۲۵}{۳})^۲=\frac{۹}{۱۶}$ است. بنابراین نسبت بزرگی سرعت متوسط به تندی متوسط در این بازه برابر است با:

$$\frac{v_{av}}{s_{av}}=\frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta t}}{\frac{\ell}{\Delta t}}=\frac{|\Delta x|}{\ell}=\frac{|S_۲-S_۱|}{S_۱+S_۲}=\frac{|\frac{۹}{۱۶}S_۱-S_۱|}{\frac{۹}{۱۶}S_۱+S_۱}=\frac{\frac{۷}{۱۶}S_۱}{\frac{۲۵}{۱۶}S_۱}=\frac{۷}{۲۵}$$

روش دوم: با استفاده از رابطهٔ $\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲$ برای رأس سهمی، می‌توانیم اندازهٔ جابه‌جایی قبل و بعد از این لحظه را به دست بیاوریم.

$$\ell_{(۰,۵/۲۵s)}=|\Delta x_{(۰,۳s)}|+|\Delta x_{(۳s,۵/۲۵s)}|=\frac{۱}{۲}a(۳)^۲+\frac{۱}{۲}a(۲/۲۵)^۲\Rightarrow \ell_{(۰,۵/۲۵s)}=\frac{۱}{۲}a(۹+\frac{۸۱}{۱۶})=\frac{۱}{۲}a(\frac{۲۵\times ۹}{۱۶})$$

$$|\Delta x_{(۰,۵/۲۵s)}|=|\Delta x_{(۰,۳s)}|-|\Delta x_{(۳s,۵/۲۵s)}|=\frac{۱}{۲}a(۳)^۲-\frac{۱}{۲}a(۲/۲۵)^۲\Rightarrow |\Delta x_{(۰,۵/۲۵s)}|=\frac{۱}{۲}a(\frac{۷\times ۹}{۱۶})$$

حالا نسبت خواسته شده را حساب می‌کنیم:

$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}}=\frac{|\Delta x|}{\ell}=\frac{\frac{۱}{۲}a(\frac{۷\times ۹}{۱۶})}{\frac{۱}{۲}a(\frac{۲۵\times ۹}{۱۶})}=\frac{۷}{۲۵}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱۹ معادله مکان – زمان دو متحرک به صورت زیر است:

$$\begin{cases}x_۱=۱۵t-۲t^۲\\ x_۲=۳t^۲\end{cases}$$

با حل معادله $x_۱=x_۲$ لحظه به هم رسیدن این دو متحرک به دست می‌آید:

$$۱۵t-۲t^۲=۳t^۲\Rightarrow ۵t^۲=۱۵t\Rightarrow ۵t=۱۵\Rightarrow t=۳s$$

باتوجه به این‌که این دو متحرک دارای شتاب ثابت هستند، بیشترین فاصله بین آن‌ها در لحظه هم سرعتی است، یعنی لحظه وسط دو هم مکانی، یعنی $t=\frac{۳}{۲}s$. حالا مکان دو متحرک در این لحظه و فاصلهٔ آن‌ها را به دست می‌آوریم:

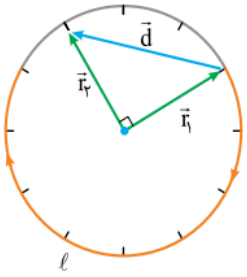
$$t=\frac{۳}{۲}s\rightarrow\begin{cases}x_۱=۱۵\times\frac{۳}{۲}-۲\times\frac{۹}{۴}=\frac{۴۵}{۲}-\frac{۱۸}{۴}=۱۸m\\ x_۲=۳\times\frac{۹}{۴}=\frac{۲۷}{۴}m\end{cases}$$

$$\text{بیشترین فاصله}=۱۸-\frac{۲۷}{۴}=۱۱/۲۵m$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۲۰ پاسخ تشریحی



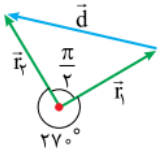
شکل (الف)

گام اول: ابتدا مطابق شکل الف مسیر حرکت عقربهٔ دقیقه‌شمار را مشخص می‌کنیم و مسافت طی‌شده توسط نوک عقربه را به دست می‌آوریم:

[با توجه به این‌که این عقربه در مدت $60\,min$ یک دور کامل (2π) را طی می‌کند، زاویهٔ پیموده‌شده در $40\,min$ را به دست می‌آوریم.]

$$\frac{60\,min}{45\,min}=\frac{2\pi\,rad}{\theta}\Rightarrow\theta=\frac{3\pi}{2}rad$$

$$\ell=r\theta\xrightarrow[r=27\,cm]{\theta=\frac{3\pi}{2}rad}\ell=27\times\frac{3\pi}{2}cm$$



شکل (ب)

گام دوم: سپس جابه‌جایی نوک عقربهٔ دقیقه‌شمار را به دست می‌آوریم. در شکل ب زاویهٔ بین $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$، 90° است؛ پس اندازهٔ جابه‌جایی $(\vec{d})$ نوک عقربه برابر می‌شود با:

$$d=r\sqrt{2}=27\sqrt{2}cm$$

گام سوم: با داشتن جابه‌جایی و مسافت و بازهٔ زمانی، سرعت متوسط و تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

دقت کنید که طول عقربه باید بر حسب mm و زمان بر حسب s نوشته شود.

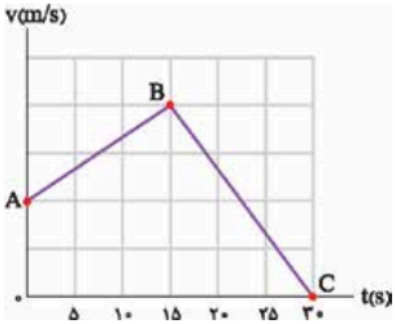
$$v_{av}=\frac{d}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=45\times60\,s]{d=270\sqrt{2}\,mm}v_{av}=\frac{270\sqrt{2}}{45\times60}=\frac{\sqrt{2}}{10}mm/s$$

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=45\times60\,s]{\ell=\frac{3\pi\times270}{2}mm}s_{av}=\frac{\frac{3\pi\times270}{2}}{45\times60}=\frac{3\pi}{20}mm/s$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۱ پاسخ تشریحی

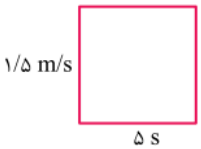
گام اول: ابتدا با استفاده از رابطهٔ شتاب متوسط در ۳۰ ثانیهٔ اول حرکت، تغییرات سرعت و ابعاد هر پیکسل از نمودار را تعیین می‌کنیم.



$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=30\,s]{a_{av}=-0/1\,m/s^2}\frac{-1}{10}=\frac{v_C-v_A}{30}$$

$$\Rightarrow v_C-v_A=-3\,m/s\xrightarrow{v_C=0}v_A=-3\,m/s$$

پس ابعاد هر پیکسل به صورت مقابل است:



گام دوم: لحظهٔ $t=20\,s$ در محدودهٔ پاره‌خط BC از نمودار است و شتاب در این لحظه با شتاب متوسط بین $t=15\,s$ تا $t=30\,s$ برابر است.

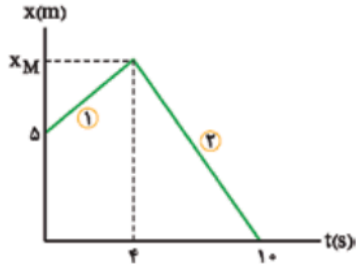
$$a_{t=20\,s}=a_{BC}=\frac{v_C-v_B}{t_C-t_B}\xrightarrow[t_C=30\,s\text{ و }t_B=15\,s]{v_C=0\text{ و }v_B=4\times1/5=6\,m/s}a_{t=20\,s}=\frac{0-6}{30-15}=\frac{-6}{15}\Rightarrow|a_{t=20\,s}|=0/4\,m/s^2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۲۲ پاسخ تشریحی

گام اول: بیشینهٔ فاصله متحرک از مبدأ محور را x_M می‌نامیم و براساس آن سرعت متحرک در ۴ ثانیهٔ اول حرکت (v_1) و همچنین سرعت متحرک در بازهٔ زمانی ۴ s تا ۱۰ s (v_2) را به دست می‌آوریم:



$$v_1 = \frac{x_M - ۵}{۴}$$

$$v_2 = \frac{۰ - x_M}{۱۰ - ۴}$$

گام دوم: $v_2 < ۰$ و $v_1 > ۰$ است؛ پس شتاب متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت منفی است و با توجه به رابطهٔ شتاب متوسط می‌توان نوشت:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۱۰ - ۰ = ۱۰\,s]{a_{av} = -۰/۲۵\,m/s^2} -۰/۲۵ = \frac{v_2 - v_1}{۱۰} \Rightarrow v_2 - v_1 = -۲/۵\,m/s$$

گام سوم: v_1 و v_2 را برحسب x_M در رابطهٔ به دست آمده در گام دوم قرار می‌دهیم:

$$\frac{-x_M}{۶} - \left(\frac{x_M - ۵}{۴}\right) = -۲/۵ \Rightarrow \frac{-۲x_M}{۱۲} - \left(\frac{۳x_M - ۱۵}{۱۲}\right) = -۲/۵$$

$$\Rightarrow \frac{-۵x_M + ۱۵}{۱۲} = -۲/۵ \Rightarrow -۵x_M + ۱۵ = -۳۰ \Rightarrow x_M = ۹\,m$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۲۳ پاسخ تشریحی **گام اول:** سرعت متحرک B را پیدا کرده و معادلهٔ مکان B را می‌نویسیم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[t_2=8\,,\,t_1=0]{x_2=0\,,\,x_1=-16\,m} v_B=\frac{0-(-16)}{8-0}=\frac{16}{8}=2\,m/s$$

$$x_B=v_Bt+x_{0B}\xrightarrow{v_B=2\,m/s\ و\ x_{0B}=-16\,m} x_B=2t-16$$

گام دوم: اکنون مکان به هم رسیدن دو متحرک را که در لحظهٔ $t=2\,s$ است، به دست می‌آوریم:

$$x_B=2t-16\xrightarrow{t=2\,s} x_A=x_B=2\times2-16=-12\,m$$

گام سوم: سرعت متحرک A را نیز به دست آورده و معادلهٔ مکان آن را نیز می‌نویسیم:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=2-0=2s]{x_2=-12m,x_1=-24m} v=\frac{-12-(-24)}{2}=\frac{12}{2}=6\,m/s\ ;\ x_A=v_At+x_{0A}\xrightarrow[x_{0A}=-24m]{v_A=6\,m/s} x_A=6t-24$$

گام چهارم: لحظهٔ عبور متحرک A از مبدأ مکان را حساب می‌کنیم:

$$x_A=0\Rightarrow 0=6t-24\Rightarrow t=4\,s$$

پس بین $4\,s$ تا $8\,s$، بردارهای مکان دو متحرک در خلاف جهت یکدیگر هستند.

گام پنجم: در لحظه‌های $t=4\,s$ تا $t=8\,s$ فاصلهٔ بین دو متحرک را به دست آورده و اندازهٔ تغییر این فاصله را پیدا می‌کنیم:

$$x_A-x_B=6t-24-(2t-16)\Rightarrow x_A-x_B=4t-8$$

$$t=4\Rightarrow x_A-x_B=4\times4-8=8\,m$$

$$t=8\Rightarrow x_A-x_B=4\times8-8=24\,m$$

پس فاصلهٔ بین دو متحرک به اندازهٔ $16\,m\ (=8-24)$ تغییر می‌کند.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۴ پاسخ تشریحی **گام اول:** رابطهٔ مسافت با تندی هر دو متحرک را از شروع حرکت تا لحظهٔ رسیدن به نقطهٔ M می‌نویسیم:

$$\ell=vt\Rightarrow\begin{cases}2d=v_A\times t\\ d=v_B\times t\end{cases}\Rightarrow 2=\frac{v_A}{v_B}$$

گام دوم: رابطهٔ مسافت با تندی هر دو متحرک را بعد از عبور از نقطهٔ M تا رسیدن به نقاط A و B می‌نویسیم:

$$\left.\begin{matrix}d=v_At_A\\ 2d=v_Bt_B\end{matrix}\right\}\xrightarrow{t_A=24\,s}\frac{1}{2}=\frac{v_A}{v_B}\times\frac{24}{t_B}\xrightarrow{\frac{v_A}{v_B}=2}\frac{1}{2}=2\times\frac{24}{t_B}\Rightarrow t_B=96\,s$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۲۵ پاسخ تشریحی **گام اول:** باید $|x_B - x_A| \le ۲۰\,m$ باشد. پس با توجه به درس‌نامه، $L = ۲۰\,m$ و شکل (الف) در نظر گرفته می‌شود.

گام دوم: اگر در لحظهٔ $t_۱$، $x_B - x_A = ۲۰\,m$ باشد، داریم:

$$x_B - x_A = ۲۰ \Rightarrow v_B t_۱ + x_{۰B} - (v_A t_۱ + x_{۰A}) = ۲۰ \Rightarrow (v_B - v_A)t_۱ + x_{۰B} - x_{۰A} = ۲۰ \xrightarrow{x_{۰B} - x_{۰A} = ۳۰۰\,m}$$

$$(v_B - v_A)t_۱ = -۲۸۰ \Rightarrow \boxed{(v_A - v_B)t_۱ = ۲۸۰\,m} \quad (۱)$$

گام سوم: اگر در لحظهٔ $t_۲$، $x_A - x_B = ۲۰\,m$ باشد، داریم:

$$x_A - x_B = ۲۰ \Rightarrow v_A t_۲ + x_{۰A} - (v_B t_۲ + x_{۰B}) = ۲۰ \Rightarrow$$

$$(v_A - v_B)t_۲ + x_{۰A} - x_{۰B} = ۲۰ \xrightarrow{x_{۰A} - x_{۰B} = -۳۰۰\,m} \boxed{(v_A - v_B)t_۲ = ۳۲۰\,m} \quad (۲)$$

گام چهارم: رابطه‌های به دست آمده در گام‌های دوم و سوم را به هم تقسیم می‌کنیم و از آن‌جا نسبت $\frac{t_۲}{t_۱}$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{(v_A - v_B)t_۲}{(v_A - v_B)t_۱} = \frac{۳۲۰}{۲۸۰} \Rightarrow \frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۸}{۷}$$

گام پنجم: با توجه به این‌که $t_۲ - t_۱ = ۶\,s$ است، لحظه‌های $t_۱$ و $t_۲$ معلوم شده و لحظهٔ به هم رسیدن دو متحرک (t_M) به دست می‌آید:

$$t_۲ - t_۱ = ۶\,s \xrightarrow{t_۲ = \frac{۸}{۷}t_۱} \frac{۸}{۷}t_۱ - t_۱ = ۶ \Rightarrow \frac{۱}{۷}t_۱ = ۶ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۴۲\,s \\ t_۲ = ۴۸\,s \end{cases}$$

بنابراین $t_M = \frac{t_۱ + t_۲}{۲} = \frac{۴۲ + ۴۸}{۲} = ۴۵\,s$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۲۶ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** دو ثانیهٔ دوم یعنی $t_۲ = ۲s$ تا $t_۴ = ۴s$؛ پس رابطهٔ شتاب حرکت را بین این دو لحظه می‌نویسیم و شتاب را پیدا می‌کنیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۴ - v_۲}{t_۴ - t_۲} \xrightarrow[t_۴=۴s, t_۲=۲s]{v_۴=۲۰m/s,\ v_۲=۳۰m/s} a = \frac{۲۰-۳۰}{۴-۲} \Rightarrow a = -۵m/s^۲$$

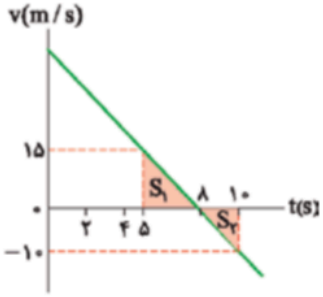
گام دوم: سرعت در لحظهٔ $t_۵ = ۵s$ را حساب می‌کنیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۵ - v_۴}{t_۵ - t_۴} \xrightarrow[t_۵=۵s, t_۴=۴s]{a=-۵m/s^۲, v_۴=۲۰m/s} -۵ = \frac{v_۵ - ۲۰}{۵-۴} \Rightarrow v_۵ = ۱۵m/s$$

گام سوم: سرعت در لحظهٔ $t_{۱۰} = ۱۰s$ را حساب می‌کنیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{۱۰} - v_۵}{t_{۱۰} - t_۵} \xrightarrow[t_{۱۰}=۱۰s, t_۵=۵s]{a=-۵m/s^۲, v_۵=۱۵m/s} -۵ = \frac{v_{۱۰} - ۱۵}{۱۰-۵} \Rightarrow v_{۱۰} = -۱۰m/s$$

گام چهارم: نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم. برای این کار باید لحظه‌ای را پیدا کنیم که سرعت متحرک در آن لحظه صفر می‌شود، یعنی همان لحظه‌ای که نمودار محور t را قطع می‌کند:



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_۵}{t - t_۵} \xrightarrow[a=-۵m/s^۲,\ t_۵=۵s]{v=۰,\ v_۵=۱۵\ m/s} -۵ = \frac{۰-۱۵}{t-۵} \Rightarrow t = ۸s$$

گام پنجم: با استفاده از سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان، مسافت پیموده‌شده در بازهٔ زمانی ۵s تا ۱۰s را به دست می‌آوریم:

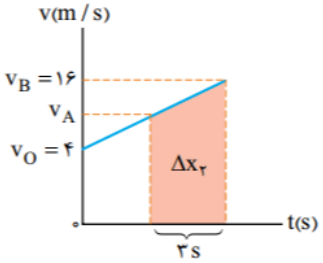
$$\ell = |S_۱| + |S_۲| = \left|\frac{(۸-۵)۱۵}{۲}\right| + \left|\frac{(۱۰-۸)(-۱۰)}{۲}\right| = ۲۲/۵ + ۱۰ = ۳۲/۵m$$

گام ششم: تندی متوسط در ۵ ثانیهٔ دوم حرکت را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۱۰-۵=۵s]{\ell = ۳۲/۵m} s_{av} = \frac{۳۲/۵}{۵} = ۶/۵m/s$$

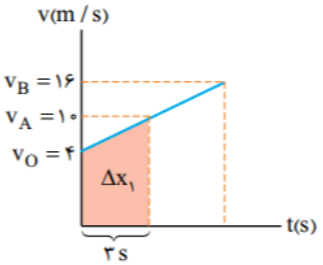
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۷ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم و با استفاده از مساحت سطح زیر این نمودار در ۳ ثانیهٔ آخر حرکت، سرعت متحرک در نقطهٔ A را پیدا می‌کنیم:



$$\Delta x_۲ = \frac{v_A + v_B}{۲} \times \Delta t \xrightarrow[\Delta t=۳s, v_B=۱۶m/s]{\Delta x_۲=۳۹m} ۳۹ = \frac{v_A + ۱۶}{۲} \times ۳ \Rightarrow v_A = ۱۰m/s$$

گام دوم: با توجه به درس‌نامه و این‌که سرعت متحرک در نقطهٔ A دقیقاً میانگین سرعت‌های v_O و v_B است، بازهٔ زمانی حرکت از O تا A نیز ۳ ثانیه است. با استفاده از سطح زیر نمودار داریم:



$$\Delta x_۱ = \frac{v_O + v_A}{۲} \times \Delta t \xrightarrow[\Delta t=۳s]{v_O=۴m/s,\ v_A=۱۰m/s} \Delta x_۱ = \frac{۴+۱۰}{۲} \times ۳ = ۲۱m$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۲۸ پاسخ تشریحی **گام اول:** معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان را در بازهٔ زمانی ۲ تا ۶ ثانیه می‌نویسیم و شتاب حرکت را به دست می‌آوریم. در لحظهٔ $t=2s$ که رأس سهمی است، شیب خط مماس بر منحنی و سرعت در این لحظه صفر است.

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow[t=6-2=4s,v_2=0]{\Delta x=-28-20=-48m} -48=\frac{1}{2}a(4)^2 \Rightarrow a=-6\,m/s^2$$

گام دوم: معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان را در بازهٔ زمانی ۲s تا لحظهٔ t که متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد $(x=0)$ و آن را Δt می‌نامیم، می‌نویسیم. در این بازهٔ زمانی، متحرک در حال نزدیک‌شدن به مبدأ محور بوده و طول بردار مکان کاهش می‌یابد:

$$\Delta x=\frac{1}{2}a(\Delta t)^2+v_0(\Delta t) \xrightarrow[v_0=0]{\Delta x=0-20=-20m,a=-6m/s^2} -20=\frac{1}{2}(-6)(\Delta t)^2 \Rightarrow (\Delta t)^2=\frac{20}{3} \Rightarrow \Delta t=\sqrt{\frac{20}{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{15}\,s$$

گام سوم: تندی متوسط در بازهٔ زمانی Δt را به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=\frac{2}{3}\sqrt{15}\,s]{\ell=|\Delta x|=|0-20|=20m} s_{av}=\frac{20}{\frac{2}{3}\sqrt{15}}=\frac{30}{\sqrt{15}}=2\sqrt{15}\,m/s$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۹ پاسخ تشریحی **گام اول:** در حرکت روی خط راست، در لحظه‌ای که جهت بردار سرعت تغییر کند، $v=0$ است.

$$\begin{cases} x=25\,m \\ v=0 \end{cases}$$

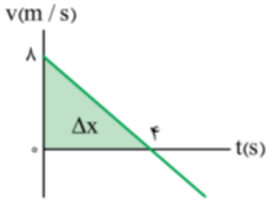
از سوی دیگر با استفاده از شکل کلی معادلهٔ سرعت ـ زمان و مطابقت آن با معادلهٔ صورت سؤال، داریم:

$$\left.\begin{matrix} v=at+v_0 \\ v=-2t+8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=-2m/s^2\ ,\ v_0=8m/s$$

هم‌چنین با استفاده از معادلهٔ سرعت ـ زمان، لحظه‌ای را که در آن $v=0$ می‌شود، به دست می‌آوریم:

$$v=-2t+8 \xrightarrow{v=0} 0=-2t+8 \Rightarrow t=4s$$

گام دوم: نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم و با استفاده از سطح زیر نمودار، جابه‌جایی متحرک در ۴ ثانیهٔ اول حرکت را به دست می‌آوریم:



$$\Delta x=\frac{8\times 4}{2}=16\,m$$

حالا مکان اولیهٔ متحرک را حساب می‌کنیم:

$$\Delta x=x-x_0 \xrightarrow[x=25\,m]{\Delta x=16\,m} 16=25-x_0 \Rightarrow x_0=9\,m$$

گام سوم: جهت بردار مکان در لحظه‌ای تغییر می‌کند که متحرک از مبدأ محور بگذرد؛ یعنی $x=0$ باشد. پس در معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک، x را برابر صفر قرار می‌دهیم و زمان مربوطه را حساب می‌کنیم:

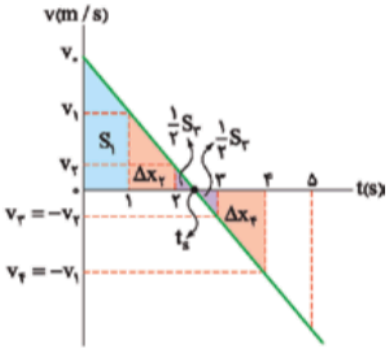
$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow[v_0=8m/s,x_0=9m]{x=0,a=-2m/s^2} 0=\frac{1}{2}(-2)t^2+8t+9$$

$$\Rightarrow t^2-8t-9=0 \Rightarrow (t-9)(t+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=9s & \text{ق ق} \\ t=-1s & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۳۰ **پاسخ تشریحی**



گام اول: با توجه به درس‌نامه، باید جابه‌جایی‌ها در ثانیه‌های دوم و چهارم حرکت (سطح زیر نمودار در بالا و پایین نمودار سرعت ـ زمان) به صورت متقارن قرار گیرند.

نمودار سرعت ـ زمان را با فرض $v_0 > 0$ رسم می‌کنیم:

$$\Delta x_2 = |\Delta x_4| \Rightarrow t_s = \frac{2+3}{2} = 2/5\,s$$

$$t_s = -\frac{v_0}{a} \xrightarrow{t_s = 2/5\,s} 2/5 = -\frac{v_0}{a} \Rightarrow v_0 = -2/5\,a$$

گام دوم: نسبت مسافت طی‌شده در ثانیهٔ سوم به مسافت طی‌شده در ثانیهٔ اول را با استفاده از سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان به دست می‌آوریم:

$$\frac{S_3}{S_1} = \frac{\frac{v_2(2/5-2)}{2}\times 2}{(\frac{v_0+v_1}{2})(1-0)} = \frac{v_2}{v_0+v_1} \xrightarrow[v_1 = a\times 1 + v_0]{v_2 = a\times 2 + v_0} \frac{S_3}{S_1} = \frac{2a+v_0}{2v_0+a} \xrightarrow{v_0 = -2/5a} \frac{S_3}{S_1} = \frac{2a-2/5a}{-5a+a} = \frac{-0/5a}{-4a} = \frac{1}{8}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۱ **پاسخ تشریحی**

گام اول: با توجه به درس‌نامه، قدر نسبت مربوط به حرکت متحرک A را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{\text{ثانیهٔ پنجم تا } T} = \Delta x_{\text{ثانیهٔ اول تا } T} + 4d_A \Rightarrow 220 = 60 + 4d_A \Rightarrow d_A = 40\,m$$

گام دوم: قدر نسبت مربوط به حرکت متحرک B را نیز حساب می‌کنیم:

$$\Delta x_{\text{ثانیهٔ پنجم تا } T} = \Delta x_{\text{ثانیهٔ اول تا } T} + 4d_B \Rightarrow 120 = \Delta x_1 + 4d_B \quad (A)$$

$$\Delta x_{t_2 \text{ تا } t_1} = (\Delta x_1 + d_B) + (\Delta x_1 + 2d_B) + (\Delta x_1 + 3d_B) = 3\Delta x_1 + 6d_B \Rightarrow 240 = 3\Delta x_1 + 6d_B \quad (B)$$

از ترکیب دو معادلهٔ (A) و (B) داریم:

$$240 = 3(120 - 4d_B) + 6d_B \Rightarrow 240 = 360 - 6d_B \Rightarrow d_B = 20\,m$$

گام سوم: نسبت شتاب دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\frac{d_B}{d_A} = \frac{a_B T^2}{a_A T^2} \xrightarrow{\substack{d_B = 20\,m \\ d_A = 40\,m}} \frac{a_B}{a_A} = \frac{1}{2}$$

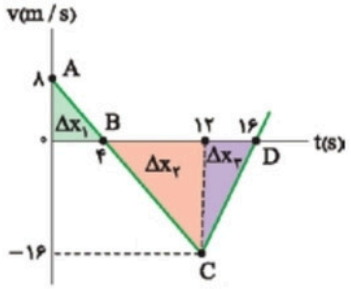
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۲۳۲ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** با استفاده از رابطهٔ تالس و تشابه مثلث‌ها، سرعت اولیهٔ متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\frac{v_0}{۴-۰}=\frac{۱۶}{۱۲-۴} \Rightarrow v_0=\frac{۴\times ۱۶}{۸}=۸\,m/s$$

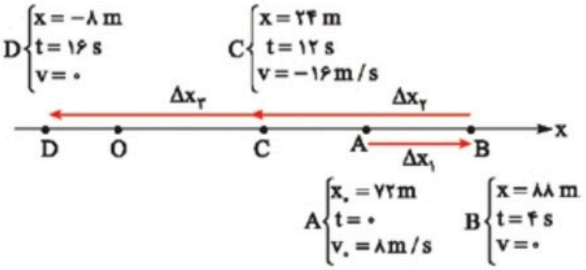
سپس با استفاده از مساحت سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان، جابه‌جایی‌های متحرک را در هر بازهٔ زمانی به دست می‌آوریم و اطلاعات آن را روی مسیر حرکت نشان می‌دهیم.



$$\Delta x_1=\frac{۸\times ۴}{۲}=۱۶\,m$$

$$\Delta x_2=\frac{۸\times(-۱۶)}{۲}=-۶۴\,m$$

$$\Delta x_3=\frac{۴\times(-۱۶)}{۲}=-۳۲\,m$$



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۰-(-۱۶)}{۱۶-۱۲}=۴\,m/s^2$$

گام دوم: شتاب حرکت را در فاصلهٔ C تا D به دست می‌آوریم:

سپس زمان حرکت از C تا O را با استفاده از معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^2+v_0t \xrightarrow[v_0=v_C=۱۶\,m/s]{a=۴\,m/s^2,\Delta x=۰-۲۴=-۲۴\,m} -۲۴=\frac{۱}{۲}\times ۴t^2-۱۶t \Rightarrow ۲t^2-۱۶t+۲۴=۰$$

$$\Rightarrow t^2-۸t+۱۲=۰ \Rightarrow (t-۲)(t-۶)=۰ \rightarrow \begin{cases} t=۲\,s \text{ ق ق} \Rightarrow \Delta t_{CO}=۲\,s \\ t=۶\,s \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

کل بازهٔ زمانی CD، ۴ ثانیه است؛ پس بازهٔ زمانی CO نمی‌تواند بیش از ۴ ثانیه باشد.

گام سوم: سرعت متحرک را هنگام عبور از مبدأ مکان (نقطهٔ O) محاسبه می‌کنیم:

$$v=at+v_0 \xrightarrow[t=۲s,\,v_0=v_C=-۱۶\,m/s]{v=v_O,\,a=۴\,m/s^2} v_O=۴\times ۲-۱۶=-۸\,m/s$$

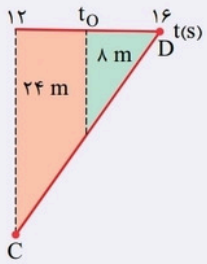
گام چهارم: بازهٔ زمانی Δt_{BO} را که متحرک در حال نزدیک‌شدن به مبدأ مکان است، پیدا کرده و شتاب متوسط در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t_{BO}=\Delta t_{BC}+\Delta t_{CO}=(۱۲-۴)+۲=۱۰\,s$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v_{BO}}{\Delta t_{BO}}=\frac{v_O-v_B}{\Delta t_{BO}}=\frac{-۸-۰}{۱۰}=-۰/۸\,m/s^2 \Rightarrow |a_{av}|=۰/۸\,m/s^2$$

تذکر به جای گام دوم و بعد از آن، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

نمودار سرعت ـ زمان متحرک را در فاصلهٔ C تا D در نظر بگیرید. اگر متحرک در لحظهٔ t_O به مبدأ مکان برسد، با استفاده از نسبت مساحت‌های مثلث‌ها داریم:



$$\frac{۸}{۲۴+۸}=\left(\frac{۱۶-t_O}{۱۶-۱۲}\right)^2 \Rightarrow \frac{۱}{۴}=\left(\frac{۱۶-t_O}{۴}\right)^2 \Rightarrow \frac{۱}{۲}=\frac{۱۶-t_O}{۴} \Rightarrow t_O=۱۴\,s$$

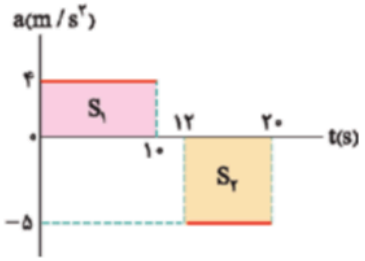
$$a_{av}=\frac{\Delta v_{BO}}{\Delta t_{BO}}=\frac{v_O-v_B}{\Delta t_{BO}}=\frac{-۸-۰}{۱۰}=-۰/۸\,m/s^2 \Rightarrow |a_{av}|=۰/۸\,m/s^2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۳۳ پاسخ تشریحی

گام اول: به کمک نمودار شتاب ـ زمان، تغییر سرعت متحرک از $t=0s$ تا $t=20s$ را به دست می‌آوریم:

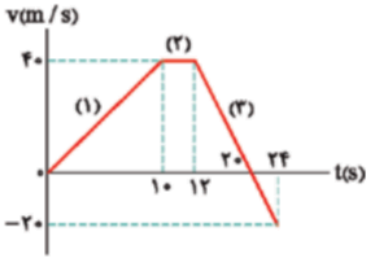


$$\Delta v = S_1 - S_2 \Rightarrow \Delta v_{(0-20)} = (4\times10) - (5\times(20-12)) = 40-40 = 0$$

گام دوم: در لحظه‌ای که جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند، سرعت آن صفر می‌شود. بر این اساس سرعت اولیهٔ متحرک را به دست می‌آوریم:

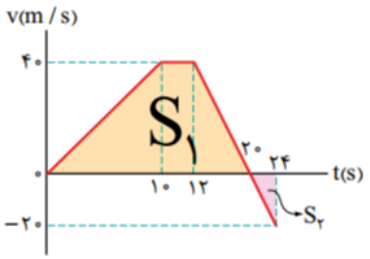
$$\Delta v_{(0-20)} = 0 \Rightarrow v_{20} - v_0 = 0 \xrightarrow{v_{20}=0} v_0 = 0$$

گام سوم: با داشتن سرعت اولیه (v_0) و نمودار شتاب ـ زمان، نمودار $v-t$ حرکت را رسم می‌کنیم.



$$\begin{cases} a_1 = 4\,m/s^2 \Rightarrow \Delta v_1 = 4\times10 = 40\,m/s \\ a_2 = 0 \Rightarrow \Delta v_2 = 0 \\ a_3 = -5\,m/s^2 \Rightarrow \Delta v_3 = -5\times12 = -60\,m/s \end{cases}$$

گام چهارم: به کمک مساحت محصور نمودار $v-t$ با محور t، مسافت طی‌شده و پس از آن تندی متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی $t=0$ تا $t=24s$ به دست می‌آوریم:



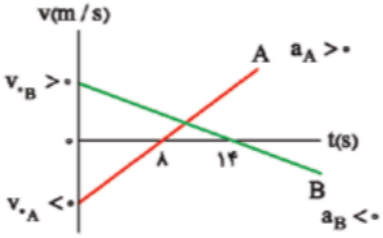
$$\ell = S_1 + |S_2| \Rightarrow \ell = \frac{(20+2)\times40}{2} + \left(\frac{4\times20}{2}\right) = 440+40 = 480\,m$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow s_{av} = \frac{480}{24} = 20\,m/s$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۳۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** با توجه به نمودار $v-t$ دو متحرک و به کمک نسبت بزرگی شتاب دو متحرک، نسبت سرعت اولیهٔ دو متحرک را برحسب شتاب متحرک B به دست می‌آوریم:



$$|a_A|=2|a_B| \xrightarrow[a_B<0]{a_A>0} a_A=-2a_B$$

$$a_A=\frac{0-v_{0A}}{8-0}=\frac{-v_{0A}}{8} \Rightarrow v_{0A}=-8a_A \xrightarrow{a_A=-2a_B} v_{0A}=16a_B$$

$$a_B=\frac{0-v_{0B}}{14-0}=-\frac{v_{0B}}{14} \Rightarrow v_{0B}=-14a_B$$

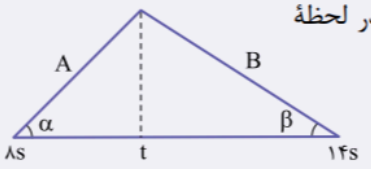
گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را برحسب شتاب متحرک B به دست آورده و با هم برابر قرار می‌دهیم، تا لحظهٔ عبور مجدد دو متحرک از کنار یکدیگر را به دست آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow{x_{0A}=x_{0B}=0} \begin{cases} x_A=\frac{1}{2}(-2a_B)t^2+(16a_B)t=-a_Bt^2+16a_Bt \\ x_B=\frac{1}{2}(a_B)t^2+(-14a_B)t=\frac{1}{2}a_Bt^2-14a_Bt \end{cases}$$

$$x_A=x_B \Rightarrow -a_Bt^2+16a_Bt=\frac{1}{2}a_Bt^2-14a_Bt \Rightarrow -\frac{3}{2}a_Bt^2+30a_Bt=0 \Rightarrow t(-\frac{3}{2}a_Bt+30a_B)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=20s \end{cases}$$

بنابراین در لحظهٔ $t=20s$ دو متحرک مجدداً به هم می‌رسند.

تکنیک در حرکت با شتاب ثابت، وقتی دو متحرک هم‌زمان از یک مکان می‌گذرند و T ثانیهٔ بعد در یک مکان دیگر دوباره به هم می‌رسند، در طول مسیر در لحظهٔ $t=\frac{T}{2}$ (در واقع چون جابه‌جایی نسبی دو متحرک صفر است، در لحظهٔ وسط حرکت آن‌ها سرعت نسبی آن‌ها صفر می‌شود.) سرعت آن‌ها یکسان می‌شود.



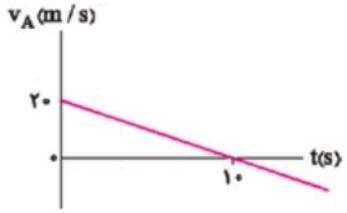
$$a_A=2|a_B| \Rightarrow \tan\alpha=2\tan\beta \Rightarrow 14-t=2(t-8) \Rightarrow t=10s$$

$$T=2t=20s$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۳۵ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا به کمک نمودار سرعت ـ زمان متحرک A، معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک A و پس از آن با داشتن x_{0A}، معادلهٔ مکان ـ زمان متحرک A را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} v_{0A}=20\,m/s \\ a_A=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{0-20}{10-0}=-2\,m/s^2 \\ x_{0A}=0 \end{cases} \xrightarrow[x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0]{v=at+v_0} \begin{cases} v_A=-2t+20 \\ x_A=-t^2+20t \end{cases}$$

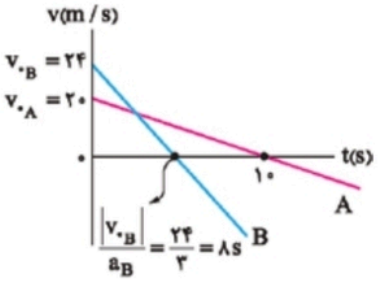
گام دوم: با توجه به نقطهٔ تلاقی نمودار $v-t$ دو متحرک در لحظهٔ $t=4s$ و معادلهٔ $v-t$ متحرک A، معادله‌های سرعت ـ زمان و مکان ـ زمان متحرک B را به دست می‌آوریم:

$$v_A=v_B \xrightarrow[v_A=-2t+20]{v_B=a_Bt+v_{0B}} -2t+20=a_Bt+v_{0B} \xrightarrow[t=4s]{v_{0B}=24\,m/s} -2(4)+20=4a_B+24$$

$$\Rightarrow 12=4a_B+24 \Rightarrow 4a_B=-12 \Rightarrow a_B=-3\,m/s^2$$

$$\begin{cases} v_{0B}=24\,m/s \\ a_B=-3\,m/s^2 \\ x_{0B}=2m \end{cases} \xrightarrow[x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0]{v=at+v_0} \begin{cases} v_B=-3t+24 \\ x_B=-\dfrac{3}{2}t^2+24t+2 \end{cases}$$

گام سوم: به کمک نمودار و معادلهٔ $v-t$ دو متحرک، بازهٔ زمانی‌ای که دو متحرک در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند را به دست می‌آوریم:



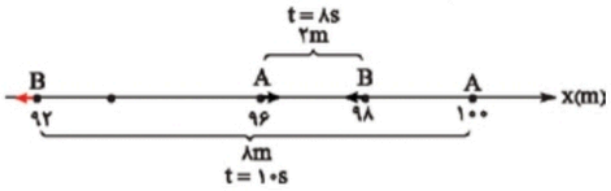
همان‌طور که در نمودار بالا ملاحظه می‌شود، بازهٔ زمانی $t_1=8s$ تا $t_2=10s$ متحرک A در جهت محور x و متحرک B در خلاف جهت محور x حرکت می‌کنند.

گام چهارم: به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک، فاصلهٔ دو متحرک را در دو لحظهٔ $t_1=8s$ و $t_2=10s$ مقایسه می‌کنیم:

$$\begin{cases} x_A=-t^2+20t \\ x_B=-\dfrac{3}{2}t^2+24t+2 \end{cases} \xrightarrow{t=8s} \begin{cases} x_A=-(8^2)+20(8)=96\,m \\ x_B=-\dfrac{3}{2}(8^2)+24(8)+2=98\,m \end{cases} \Rightarrow |x_A-x_B|=2m$$

$$\xrightarrow{t=10s} \begin{cases} x'_A=-(10^2)+20(10)=100\,m \\ x'_B=-\dfrac{3}{2}(10^2)+24(10)+2=92\,m \end{cases} \Rightarrow |x'_A-x'_B|=8m$$

$$\Rightarrow 8-2=6m$$



(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۳۶ **پاسخ تشریحی** با توجه به نمودار مکان ـ زمان دو متحرک درمی‌یابیم که شتاب متحرک A در جهت محور x (تقعر رو به بالا) و شتاب و متحرک B در خلاف جهت محور x (تقعر رو به پایین) است. از طرفی با توجه به مکان اولیهٔ دو متحرک و برابر شدن سرعت دو متحرک در لحظهٔ $t = ۲s$ می‌توانیم به کمک حرکت نسبی، شتاب نسبی و پس از آن بزرگی شتاب هریک از متحرک‌ها را به دست آوریم:

$$A\begin{cases} x_{۰A} = ۴m \\ v_{۰A} \\ a_A = a \end{cases}, \quad B\begin{cases} x_{۰B} = -۱۲m \\ v_{۰B} \\ a_B = -a \end{cases}$$

حرکت نسبی متحرک B (A ساکن فرض شود.)

$$\begin{cases} x_{۰\,\text{نسبی}} = ۴ - (-۱۲) = ۱۶m \\ v_{۰\,\text{نسبی}} \\ a_{\text{نسبی}} = a - (-a) = ۲a \end{cases}$$

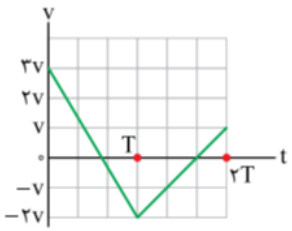
$$\Delta x_{\text{نسبی}} = \frac{۱}{۲} a_{\text{نسبی}} t^۲ + v_{۰\,\text{نسبی}} t \xrightarrow[v = at + v_۰ \to\ ۰ = ۲a_{\text{نسبی}} + v_{۰\,\text{نسبی}} \to v_{۰\,\text{نسبی}} = -۲a_{\text{نسبی}}]{\Delta x_{\text{نسبی}} = ۰ - ۱۶ = -۱۶\,m} -۱۶ = \frac{۱}{۲} \times a_{\text{نسبی}} \times (۲^۲) + (-۲a_{\text{نسبی}} \times ۲)$$

$$\Rightarrow -۱۶ = ۲a_{\text{نسبی}} - ۴a_{\text{نسبی}} \Rightarrow ۲a_{\text{نسبی}} = ۱۶ \Rightarrow a_{\text{نسبی}} = ۸\,m/s^۲ \xrightarrow{a_{\text{نسبی}} = ۲a} ۲a = ۸ \Rightarrow a = ۴\,m/s^۲$$

بنابراین بزرگی شتاب هریک از متحرک‌ها $۴\,m/s^۲$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۷ **پاسخ تشریحی** با توجه به نمودار و با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم:



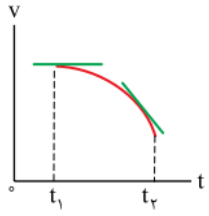
$$\frac{W_{t_{(\text{ثانیهٔ اول } T)}}}{W_{t_{(\text{ثانیهٔ دوم } T)}}} = \frac{\frac{۱}{۲} m[(-۲v)^۲ - (۳v)^۲]}{\frac{۱}{۲} m[v^۲ - (-۲v)^۲]} = \frac{۴v^۲ - ۹v^۲}{v^۲ - ۴v^۲} = \frac{-۵v^۲}{-۳v^۲} = \frac{۵}{۳}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

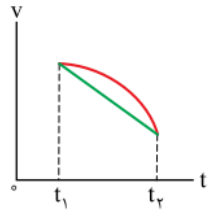
۲۳۸ **پاسخ تشریحی** بررسی عبارت‌ها:

الف) اگر نمودار سرعت ـ زمان، در بالای محور t باشد، یعنی $v > ۰$ است و حرکت آن در جهت محور x است، حتی اگر v در حال کاهش باشد؛ بنابراین عبارت «الف» نادرست است.

ب) شیب خط مماس بر نمودار سرعت ـ زمان، شتاب حرکت را نشان می‌دهد. در این‌جا گرچه شیب خط مذکور منفی است، اما اندازهٔ آن در حال افزایش است؛ یعنی عبارت «ب» درست است.



پ) شتاب متوسط بین دو لحظه، برابر شیب خطی است که نمودار سرعت ـ زمان را در آن دو لحظه، قطع می‌کند. در این‌جا شیب خط مذکور منفی است؛ یعنی شتاب متوسط در خلاف جهت محور x است و عبارت «پ» درست است.



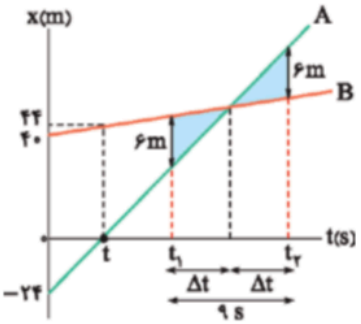
ت) از آن‌جاکه در تمام بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، سرعت متحرک مثبت است؛ پس سرعت متوسط آن نیز در این بازه، مثبت است و عبارت «ت» نادرست است.

جمع‌بندی بررسی عبارت‌ها نشان می‌دهد که ۳ درست است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۳۹



پاسخ تشریحی **گام اول:** در بازهٔ زمانی صفر تا t ثانیه، فاصلهٔ دو متحرک از $64\,m\,(=(-24)-40)$ به $44\,m\,(=-0-44)$ می‌رسد، یعنی ۲۰ متر کاهش می‌یابد. حال ببینیم چه مدت طول می‌کشد تا فاصلهٔ دو متحرک از $6\,m$ به صفر برسد.

با یک تناسب ساده داریم:

$$\frac{t}{\Delta t}=\frac{20}{6}\Rightarrow \Delta t=\frac{3}{10}t$$

توجه کنید که چون سرعت‌ها ثابت هستند، می‌توانیم از تناسب و رابطهٔ خطی استفاده کنیم.

گام دوم: $\frac{3}{10}t$ نیز طول می‌کشد تا فاصلهٔ دو متحرک از صفر به $6\,m$ برسد؛ بنابراین مدت‌زمانی که فاصلهٔ دو متحرک، کم‌تر از $6\,m$ می‌شود، شامل ۲ تا $\frac{3}{10}t$ است، به این ترتیب زمان t به دست می‌آید:

$$2\times\frac{3}{10}t=9\Rightarrow t=15\,s$$

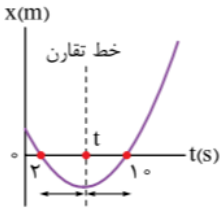
گام سوم: اکنون با معلوم‌بودن زمان t ، تندی متحرک A که همان سرعت آن است، به دست می‌آید:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_A=\frac{0-(-24)}{15-0}=\frac{24}{15}=\frac{8}{5}\,m/s$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۴۰ **پاسخ تشریحی** روش اول: **گام اول**: لحظهٔ تغییر جهت حرکت را با توجه به تقارن نمودار $x-t$ در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، مطابق شکل روبه‌رو به دست می‌آوریم:



$$t=\frac{۲+۱۰}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶s$$

گام دوم: شتاب حرکت را محاسبه می‌کنیم:

(با توجه به نمودار مکان ـ زمان در می‌یابیم که شیب نمودار در لحظهٔ $t=۲s$ منفی و در لحظهٔ $t=۱۰s$ مثبت است.)

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۱۰-۲=۸s]{\Delta v=v_{۱۰s}-v_{۲s}=۱۶-(-۱۶)=۳۲m/s} a=\frac{۳۲}{۸}=۴m/s^{۲}$$

گام سوم: سرعت اولیهٔ متحرک را به دست می‌آوریم: $v=at+v_{۰}\xrightarrow[a=۴m/s^{۲}]{t=۲s\,,\,v=-۱۶m/s}-۱۶=۴(۲)+v_{۰}\Rightarrow v_{۰}=-۲۴m/s$

گام چهارم: با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان، در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، فاصلهٔ متحرک در لحظهٔ تغییر جهت $(t=۶s)$ را از مکان اولیه $(x_{۰})$ به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^{۲}+v_{۰}t+x_{۰}\xrightarrow[v_{۰}=-۲۴m/s]{a=۴m/s^{۲}\,,\,t=۶s} x_{۶s}=\frac{۱}{۲}(۴)(۶)^{۲}+(-۲۴)(۶)+x_{۰}\Rightarrow x_{۶s}=-۷۲+x_{۰}\Rightarrow |x_{۶s}-x_{۰}|=۷۲m$$

بنابراین فاصلهٔ متحرک در لحظهٔ تغییر جهت تا مکان اولیه برابر با $۷۲m$ است.

روش دوم: با توجه به نمودار مکان ـ زمان و محاسبهٔ شتاب می‌توانیم معادلهٔ مکان ـ زمان را به دست آوریم:

ریشه‌های نمودار: $t=۲s\ ,\ t=۱۰s\ ,\ v_{۲s}=-۱۶m/s\ ,\ v_{۱۰s}=۱۶m/s$

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۱۶-(-۱۶)}{۱۰-۲}=\frac{۳۲}{۸}=۴m/s^{۲}$$

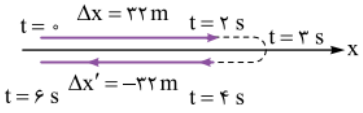
$$x=K(t-۲)(t-۱۰)\xrightarrow{K=\frac{۱}{۲}a=۲} x=۲(t-۲)(t-۱۰)\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{t=۰} x_{۰}=۲(-۲)(-۱۰)=۴۰m\\ \xrightarrow{t=۶s} x_{۶s}=۲(۴)(-۴)=-۳۲m\end{cases}$$

$$|x_{۶s}-x_{۰}|=۷۲m$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۴۱ **پاسخ تشریحی**



گام اول: وقتی در یک حرکت با شتاب ثابت، مسافت طی‌شده در ۲ ثانیهٔ اول با مسافت طی‌شده در ۲ ثانیهٔ سوم برابر است؛ یعنی متحرک در وسط دو ثانیهٔ دوم حرکت $(t = ۳s)$ جهت حرکت خود را تغییر داده و سرعت آن صفر شده است. اگر فرض کنیم سرعت اولیهٔ متحرک مثبت است، مسیر حرکت آن، مطابق شکل روبه‌رو خواهد بود:

گام دوم: جابه‌جایی متحرک در دو ثانیهٔ اول و دو ثانیهٔ سوم را می‌نویسیم و از آن‌جا شتاب حرکت و سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

الف) ۲ ثانیهٔ اول:

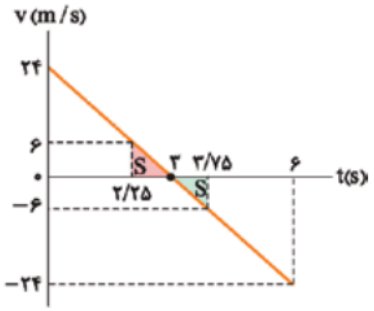
$$\Delta x = (n - ۰/۵)aT^۲ + v_۰T \xrightarrow[T=۲s]{n=۱\ ,\ \Delta x=۳۲m} ۳۲ = (۱ - ۰/۵)a \times ۲^۲ + v_۰ \times ۲ \Rightarrow ۳۲ = ۲a + ۲v_۰ \Rightarrow ۱۶ = a + v_۰$$

ب) ۲ ثانیهٔ سوم:

$$\Delta x = (n - ۰/۵)aT^۲ + v_۰T \xrightarrow[T=۲s]{n=۳\ ,\ \Delta x=-۳۲m} -۳۲ = (۳ - ۰/۵)a \times ۲^۲ + v_۰ \times ۲ \Rightarrow -۳۲ = ۱۰a + ۲v_۰$$

$$\Rightarrow -۱۶ = ۵a + v_۰ \Rightarrow \begin{cases} ۱۶ = a + v_۰ \\ -۱۶ = ۵a + v_۰ \end{cases} \Rightarrow ۳۲ = -۴a \Rightarrow a = -۸m/s^۲ \Rightarrow ۱۶ = -۸ + v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۲۴m/s$$

گام سوم: نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم. توجه کنید که کم‌ترین جابه‌جایی و کم‌ترین تندی متوسط در یک بازهٔ زمانی معین، به صورت متقارن در طرفین لحظه‌ای اتفاق می‌افتد که متحرک ایستاده است؛ یعنی باید از $۱/۵s$ تا $۲/۲۵s$ تا $۳/۷۵s$ باشد.



$$v = at + v_۰$$

$$t = ۲/۲۵s \Rightarrow v = -۸ \times ۲/۲۵ + ۲۴ \Rightarrow v = ۶m/s$$

$$t = ۳/۷۵s \Rightarrow v = -۸ \times ۳/۷۵ + ۲۴ \Rightarrow v = -۶m/s$$

گام چهارم: قدرمطلق مساحت سطح بین این نمودار و محور زمان، همان مسافت طی‌شده است:

$$S = \frac{(۳ - ۲/۲۵) \times ۶}{۲} = ۲/۲۵m$$

$$\ell = S + S = ۲/۲۵ + ۲/۲۵ = ۴/۵m$$

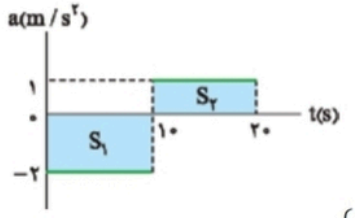
$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=۱/۵s]{\ell=۴/۵\ m} s_{av} = \frac{۴/۵}{۱/۵} = ۳m/s$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۴۲

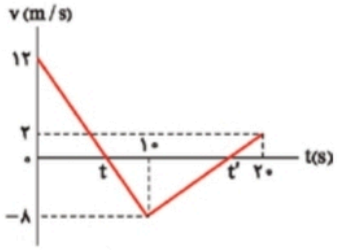
پاسخ تشریحی **گام اول:** با استفاده از نمودار شتاب ـ زمان و سرعت اولیه، نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم. مطابق شکل مقابل داریم:



$$S_1 = 10\times 2 = 20 \quad , \quad S_2 = (20-10)\times 1 = 10 \Rightarrow \begin{cases} \text{صفر تا } 10\,s: \Delta v_1 = -S_1 = -20\ m/s \\ \text{10s تا 20s}: \Delta v_2 = S_2 = 10\ m/s \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\Delta v_1=-20\,m/s\ ,\ \Delta v_2=10\,m/s]{v_0=12\,m/s} \begin{cases} v_{10} = 12-20 = -8\ m/s \\ v_{20} = -8+10 = 2\ m/s \end{cases}$$

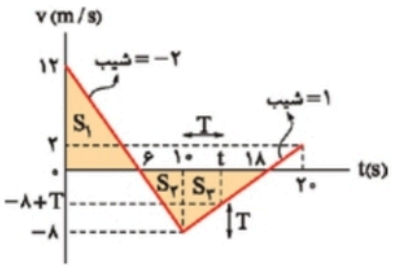
اکنون با استفاده از شتاب هر قسمت، لحظه‌های t و t' را به دست می‌آوریم:



$$a_1 = -2\,m/s^2 \Rightarrow -2 = \frac{0-12}{t-0} \Rightarrow t = 6\,s$$

$$a_2 = 1\,m/s^2 \Rightarrow 1 = \frac{0-(-8)}{t'-10} \Rightarrow t' = 18\,s$$

گام دوم: با توجه به نمودار سرعت ـ زمان شکل زیر، لحظهٔ تغییر جهت بردار مکان (عبور متحرک از مکان $x=0$) را به دست می‌آوریم:
(متحرک باید به اندازهٔ $4m$ در خلاف جهت محور x جابه‌جا شود.)



$$\begin{cases} S_1 = \frac{6\times 12}{2} = 36 \\ S_2 = \frac{(10-6)\times 8}{2} = 16 \end{cases}$$

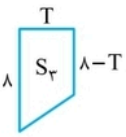
از صفر تا 10s : $\Delta x_1 = S_1 - S_2 = 36-16 = 20\,m$

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 \Rightarrow -4 = 20 + \Delta x_2$$

$$\Rightarrow \Delta x_2 = -24\,m = -S_3 \Rightarrow S_3 = 24$$

(جابه‌جایی از 10s تا t)

با داشتن S_3، لحظهٔ t را به دست می‌آوریم. برای این کار بازهٔ زمانی $t-10$ را برابر با T فرض می‌کنیم. با توجه به این‌که S_3 مساحت یک ذوزنقه است، مطابق شکل داریم:



$$S_3 = 24 = \frac{(8+8-T)T}{2} \Rightarrow T^2 - 16T + 48 = 0 \Rightarrow T \begin{cases} T = 4\ s \checkmark \\ T = 12\ s \times \end{cases}$$

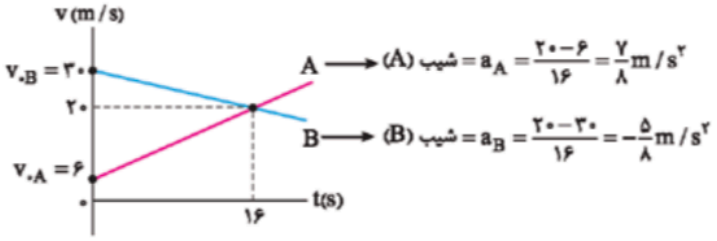
بنابراین متحرک در لحظهٔ $t = 10+4 = 14\,s$ از مکان $x=0$ عبور می‌کند.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۴۳ **پاسخ تشریحی**

گام اول: با توجه به نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک، سرعت اولیهٔ (v_0) و شتاب (a) دو متحرک را به دست می‌آوریم:



گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A=\frac{1}{2}(\frac{7}{8})t^2+6t+x_{0A} \\ x_B=\frac{1}{2}(-\frac{5}{8})t^2+30t+x_{0B} \end{cases} \xrightarrow{x_{0A}=x_{0B}+84} \begin{cases} x_A=\frac{7}{16}t^2+6t+x_{0B}+84 \\ x_B=-\frac{5}{16}t^2+30t+x_{0B} \end{cases}$$

گام سوم: لحظه‌های عبور دو متحرک از کنار هم را به دست می‌آوریم:

$$x_A=x_B \Rightarrow \frac{7}{16}t^2+6t+x_{0B}+84=-\frac{5}{16}t^2+30t+x_{0B} \Rightarrow \frac{3}{4}t^2-24t+84=0$$

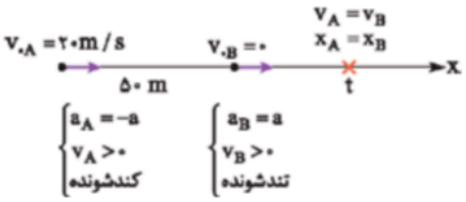
$$\Rightarrow t^2-32t+112=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1=4s \\ t_2=28s \end{cases}$$

بنابراین در لحظهٔ $t_2=28s$ دو متحرک برای بار دوم از کنار هم عبور می‌کنند.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۴ **پاسخ تشریحی**

گام اول: حداقل شتاب a باید آن‌قدر باشد که وقتی خودرو به موتورسوار می‌رسد و مکان آن‌ها یکسان می‌شود، سرعت آن‌ها نیز یکسان شود تا موتورسوار با حرکت تندشوندهٔ خود از خودرو فاصله بگیرد. خودرو را متحرک A و موتورسوار را متحرک B فرض می‌کنیم:



گام دوم: معادلهٔ سرعت دو متحرک را در لحظهٔ t با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$v=at+v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_A=a_At+v_{0A} \Rightarrow v_A=-at+20 \\ v_B=a_Bt+v_{0B} \Rightarrow v_B=at \end{cases} \xrightarrow{v_A=v_B} -at+20=at \Rightarrow 20=2at \Rightarrow at=10$$

گام سوم: معادلهٔ مکان دو متحرک را در لحظهٔ t با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+\cancel{x_{0A}} \Rightarrow x_A=-\frac{1}{2}at^2+20t \\ x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+\cancel{v_{0B}}t+x_{0B} \Rightarrow x_B=\frac{1}{2}at^2+50 \end{cases}$$

$$x_A=x_B \Rightarrow -\frac{1}{2}at^2+20t=\frac{1}{2}at^2+50 \Rightarrow 20t=at^2+50 \xrightarrow{at=10}$$

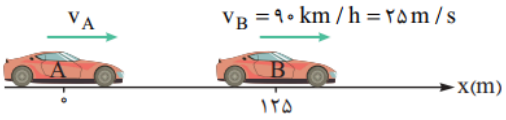
$$20t=10t+50 \Rightarrow 10t=50 \Rightarrow t=5s$$

$$at=10 \Rightarrow a\times5=10 \Rightarrow a=2m/s^2$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۴۵ **پاسخ تشریحی** شکل مقابل، لحظه‌ای را نشان می‌دهد که دو خودرو در فاصلهٔ ۱۲۵متری از یکدیگر قرار دارند و خودروی A با شتاب ثابت به سمت خودروی B شروع به حرکت می‌کند:



لحظه‌ای که دو خودرو به هم می‌رسند، مکان آن‌ها یکسان می‌شود $(x_A = x_B)$؛ پس ابتدا معادلهٔ مکان ـ زمان دو خودرو را می‌نویسیم تا بتوانیم لحظه‌ای را که دو خودرو به هم می‌رسند، پیدا کنیم:

$$x_A = \frac{۱}{۲}a_A t^۲ + v_{۰A}t + x_{۰A} \xrightarrow[a_A = ۲/۴\,m/s^۲]{x_{۰A}=۰,\ v_{۰A}=۰} x_A = \frac{۱}{۲}\times(۲/۴)t^۲ + ۰ + ۰ = ۱/۲t^۲$$

$$x_B = v_B t + x_{۰B} \xrightarrow[v_B = ۲۵\,m/s]{x_{۰B}=۱۲۵\,m} x_B = ۲۵t + ۱۲۵$$

حالا معادلهٔ مکان ـ زمان دو خودروی A و B را برابر با یکدیگر قرار می‌دهیم تا لحظه‌ای را که به هم می‌رسند، پیدا کنیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow ۱/۲t^۲ = ۲۵t + ۱۲۵ \xrightarrow{\times ۵} ۶t^۲ - ۱۲۵t - ۶۲۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = -\frac{۲۵}{۶}s \ \times \\ t_۲ = ۲۵s \ \checkmark \end{cases}$$

بنابراین، ۲۵s پس از شروع حرکت خودروی A، دو خودرو به یکدیگر می‌رسند. سؤال از ما مسافت طی‌شده توسط خودروی A در این ۲۵s را می‌خواهد. با توجه به این‌که خودروی A از حال سکون، با شتاب ثابت و بر روی خط راست شروع به حرکت کرده است، پس مسافت طی‌شده در ۲۵s اول حرکت آن با جابه‌جایی آن در این مدت برابر است. با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان خودروی A می‌توانیم بنویسیم:

$$x_A = ۱/۲t^۲ \xrightarrow{t=۲۵s} x_A = ۱/۲(۲۵)^۲ = ۷۵۰m$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۴۶

پاسخ تشریحی هر دو متحرک در مبدأ زمان $(t=0)$ در مبدأ مکان $(x=0)$ هستند. با توجه به این‌که سرعت حرکت B همواره مثبت است، پس متحرک B همواره در جهت محور x حرکت می‌کند و در نتیجه بردار مکان آن در جهت محور x است.

از طرفی، سرعت متحرک A تا لحظهٔ $t=8s$ منفی و پس از آن مثبت است، بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم که متحرک A تا لحظهٔ $t=8s$ در خلاف جهت محور x حرکت کرده و در لحظهٔ $t=8s$ تغییر جهت داده، سپس در جهت محور x به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ پس بردار مکان متحرک A تا لحظه‌ای که دوباره از مکان $x=0$ می‌گذرد، در خلاف جهت محور x است. بازهٔ زمانی‌ای که مد نظر سؤال است، مدت‌زمانی است که بردار مکان دو متحرک در خلاف جهت یکدیگرند؛ پس باید ببینیم که متحرک A در چه لحظه‌ای از مکان $x=0$ عبور می‌کند.

$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+x_{0A} \xrightarrow[a_A=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}m/s^2,\ v_{0A}=-20m/s]{x_{0A}=0} 0=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}t^2-20t+0 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{4}t^2-20t=0 \Rightarrow 5t(\frac{t}{4}-4)=0 \Rightarrow t_1=0s,\ t_2=16s$$

متحرک A در لحظه‌های $t_1=0$ و $t_2=16s$ از مکان $x=0$ عبور می‌کند. در این مدت، بردار مکان متحرک A در خلاف جهت محور x و بردار مکان متحرک B در جهت محور x است؛ پس بازهٔ زمانی‌ای که مد نظر طراح است، 16s اول حرکت است.

سؤال از ما نسبت تندی متوسط متحرک A به تندی متوسط متحرک B در این 16s را می‌خواهد؛ پس باید مسافتی را که هر یک از این متحرک‌ها در این مدت طی می‌کنند، به دست بیاوریم. با توجه به نمودار سرعت ـ زمان این دو متحرک، متحرک A تا لحظهٔ $t=8s$ در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند، سپس در این لحظه تغییر جهت داده و در جهت محور x به حرکت خود ادامه می‌دهد؛ پس جابه‌جایی متحرک A از لحظهٔ $t_1=0$ تا لحظهٔ $t=8s$ و هم‌چنین از لحظهٔ $t=8s$ تا $t_2=16s$ را به دست می‌آوریم.

$$\Delta x_{1A}=\frac{1}{2}a_At_1^2+v_{0A}t_1 \xrightarrow[t_1=8s,\ v_{0A}=-20m/s]{a_A=\frac{5}{2}m/s^2} \Delta x_{1A}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times8^2-20\times8=-80m$$

$$\Delta x_{2A}=\frac{1}{2}a_At_2^2+v_{(t=8s)}t_2 \xrightarrow[t_2=8s,\ v_{(t=8s)}=0m/s]{a_A=\frac{5}{2}m/s^2} \Delta x_{2A}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times8^2+0\times8=80m$$

حالا اندازهٔ این جابه‌جایی‌ها را با هم جمع می‌کنیم تا مسافت طی‌شده توسط متحرک A تا لحظهٔ $t=16s$ را پیدا کنیم:

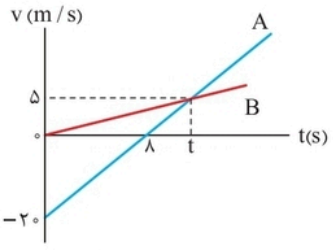
$$l_A=|\Delta x_{1A}|+|\Delta x_{2A}|=80+80=160m$$

بنابراین تندی متوسط متحرک A در 16s اول حرکت برابر است با:

$$s_{av,A}=\frac{l_A}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=16s]{l_A=160m} s_{av,A}=\frac{160}{16}=10m/s$$

به سراغ متحرک B می‌رویم. برای این‌که مسافت طی‌شده توسط متحرک B در 16s اول حرکت را به دست بیاوریم، به شتاب آن نیاز داریم.

با توجه به نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B و با استفاده از تشابه مثلث‌ها، لحظهٔ t را به دست می‌آوریم تا بتوانیم شتاب متحرک B را پیدا کنیم.



$$\frac{20}{5}=\frac{8}{t-8} \Rightarrow t-8=2 \Rightarrow t=10s$$

$$a_B=\frac{\Delta v_B}{\Delta t}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}m/s^2$$

متحرک B از لحظهٔ $t=0$ تا لحظهٔ $t=16s$ در جهت محور x حرکت می‌کند و تغییر جهت نمی‌دهد؛ پس مسافت طی‌شده توسط آن در این مدت با جابه‌جایی آن در این بازهٔ زمانی یکسان است و می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{0B}t \xrightarrow[t=16s,\ v_{0B}=0m/s]{a_B=\frac{1}{2}m/s^2} \Delta x_B=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times16^2+0\times16=64m$$

بنابراین تندی متوسط متحرک B در 16s اول حرکت برابر است با:

$$s_{av,B}=\frac{l_B}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=16s]{l_B=\Delta x_B=64m} s_{av,B}=\frac{64}{16}=4m/s$$

در آخر، خواستهٔ سؤال یعنی نسبت تندی متوسط متحرک A $(s_{av,A})$ به تندی متوسط متحرک B $(s_{av,B})$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{s_{av,A}}{s_{av,B}}=\frac{10}{4}=2/5$$

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۴۷ **پاسخ تشریحی** حرکت متحرک از سه قسمت تشکیل شده است: بازهٔ زمانی (۰s تا ۴s) با شتاب ثابت $a_1 = 3\,m/s^2$، بازهٔ زمانی (۴s تا ۶s) با شتاب ثابت $a_2 = -2\,m/s^2$ و بازهٔ زمانی (۶s تا ۱۰s) با شتاب ثابت $a_3 = 1\,m/s^2$.

جابه‌جایی متحرک در هر یک از این بازه‌های زمانی را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + v_0 t_1 \xrightarrow{a_1=3\,m/s^2,\ t_1=4\,s} \Delta x_1 = \frac{3}{2}\times 4^2 + v_0 \times 4 = 24 + 4v_0$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a_2 t_2^2 + v_{(t=4s)} t_2 \xrightarrow[v_{(t=4s)}=v_0+3\times4=v_0+12]{a_2=-2\,m/s^2,\ t_2=2\,s} \Delta x_2 = \frac{1}{2}\times(-2)\times 2^2 + (v_0+12)\times 2 = 2v_0 + 20$$

$$\Delta x_3 = \frac{1}{2}a_3 t_3^2 + v_{(t=6s)} t_3 \xrightarrow[v_{(t=6s)}=v_0+3\times4-2\times2=v_0+8]{a_3=1\,m/s^2,\ t_3=4\,s} \Delta x_3 = \frac{1}{2}\times 1\times 4^2 + (v_0+8)\times 4 = 4v_0 + 40$$

جابه‌جایی متحرک در ۱۰s اول برابر با ۴۴m است؛ بنابراین مجموع Δx_1، Δx_2 و Δx_3 برابر با ۴۴m است و می‌توانیم بنویسیم:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 44 \Rightarrow 24 + 4v_0 + 2v_0 + 20 + 4v_0 + 40 = 44 \Rightarrow 10v_0 = -40 \Rightarrow v_0 = -4\,m/s$$

سؤال از ما کار کل انجام‌شده بر روی متحرک در ۱۰s اول حرکت را می‌خواهد. سرعت متحرک در لحظهٔ $t_1 = 0s$ را به دست آوردیم $(v_0 = -4\,m/s)$، اگر سرعت متحرک در لحظهٔ $t_2 = 10s$ را هم پیدا کنیم، می‌توانیم با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی کار کل انجام‌شده بر روی متحرک در ۱۰s اول حرکت را محاسبه کنیم:

$$v_{(t=10s)} = v_0 + 3\times4 - 2\times2 + 1\times4 = v_0 + 12 \xrightarrow{v_0=-4\,m/s} v_{(t=10s)} = 8\,m/s$$

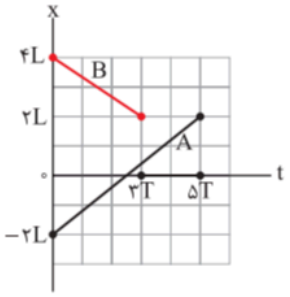
در آخر با استفاده از قضیهٔ کار ـ انرژی جنبشی می‌توانیم بنویسیم:

$$W_t = \Delta K = \frac{1}{2}m(v_{(t=10s)}^2 - v_0^2) \xrightarrow[v_0=-4\,m/s]{m=5\,kg,\ v_{(t=10s)}=8\,m/s} W_t = \frac{1}{2}\times 5\times(8^2 - (-4)^2) = \frac{5}{2}\times(64-16) = 120\,J$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۴۸ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** سرعت هر یک از دو متحرک A و B و معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را به دست می‌آوریم. برای این منظور طول هر واحد روی محور x را برابر با L و فاصلهٔ زمانی هر واحد روی محور زمان را برابر با T در نظر می‌گیریم:



$$v_A=\frac{\Delta x_A}{\Delta t_A}=\frac{4L}{5T}\Rightarrow x_A=v_At+x_{0A}\Rightarrow x_A=\frac{4}{5}\frac{L}{T}t-2L$$

$$v_B=\frac{\Delta x_B}{\Delta t_B}=\frac{-2L}{3T}\Rightarrow x_B=v_Bt+x_{0B}\Rightarrow x_B=-\frac{2}{3}\frac{L}{T}t+4L$$

گام دوم: معادلهٔ مکان ـ زمان این دو متحرک را برابر با هم قرار می‌دهیم تا لحظهٔ به هم رسیدن و مکان به هم رسیدن آن‌ها را به دست آوریم:

$$x_A=x_B\Rightarrow\frac{4}{5}\frac{L}{T}t-2L=-\frac{2}{3}\frac{L}{T}t+4L\Rightarrow\frac{4}{5}\frac{L}{T}t+\frac{2}{3}\frac{L}{T}t=6L\Rightarrow\frac{22}{15}\frac{t}{T}=6\Rightarrow t=\frac{90}{22}T\Rightarrow t=\frac{45}{11}T$$

$$x_A=\frac{4}{5}\frac{L}{T}t-2L\xrightarrow{t=\frac{45}{11}T}x_A=\frac{4}{5}\frac{L}{T}\times\frac{45}{11}T-2L=\frac{36}{11}L-2L$$

$$\xrightarrow{x_A=x_B}x_B=x_A=\frac{14}{11}L$$

گام سوم: جابه‌جایی هر دو متحرک را تا لحظهٔ به هم رسیدن، به دست آورده و نسبت آن‌ها را پیدا می‌کنیم:

$$\Delta x_A=x_A-x_{0A}=\frac{14}{11}L-(-2L)=\frac{14}{11}L+\frac{22}{11}L=\frac{36}{11}L$$

$$\Delta x_B=x_B-x_{0B}=\frac{14}{11}L-4L=\frac{14}{11}L-\frac{44}{11}L=-\frac{30}{11}L$$

$$\frac{|\Delta x_A|}{|\Delta x_B|}=\frac{\frac{36}{11}L}{\frac{30}{11}L}=\frac{36}{30}=\frac{6}{5}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۴۹ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** بیشترین فاصلهٔ خودرو تا کامیون، در لحظه‌ای است که سرعت خودرو با سرعت کامیون برابر می‌شود. این لحظه را به دست می‌آوریم:

$$\text{کامیون } v_A = ۵۴\,km/h = \frac{۵۴}{۳/۶} = ۱۵\,m/s$$

$$\text{خودرو } v_B = at + v_۰ \xrightarrow[v_۰=۰]{a=۱/۸\,m/s^۲} v_B = ۱/۸t$$

$$v_A = v_B \Rightarrow ۱۵ = ۱/۸t \Rightarrow t = \frac{۱۵}{۱/۸}s$$

گام دوم: مکان کامیون و مکان خودرو در لحظهٔ فوق را حساب می‌کنیم تا بیشینهٔ فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر به دست آید:

$$x_A = v_A t + x_۰ \xrightarrow[x_۰=۰]{v_A=۱۵\,m/s,\ t=\frac{۱۵}{۱/۸}s} x_A = ۱۵\times\frac{۱۵}{۱/۸} = ۱۵\times\frac{۲۵}{۳} = ۱۲۵\,m$$

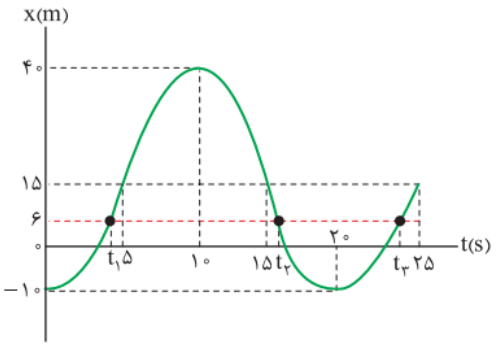
$$x_B = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \xrightarrow[t=\frac{۱۵}{۱/۸}s,\ x_۰=۰]{a=۱/۸\,m/s^۲,\ v_۰=۰} x_B = \frac{۱}{۲}\times ۱/۸\times(\frac{۱۵}{۱/۸})^۲ = \frac{۲۲۵}{۳/۶} = ۶۲/۵\,m$$

$$x_A - x_B = ۱۲۵ - ۶۲/۵ = ۶۲/۵\,m$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۰ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** می‌دانیم مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان در هر بازهٔ زمانی، برابر با جابه‌جایی در آن بازهٔ زمانی است. با توجه به این نکته و با استفاده از نمودار سرعت ـ زمان داده‌شده، نمودار مکان ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم.

$\Delta t(s)$	$\Delta x(m)$
۵ تا ۰	$\frac{۵\times۱۰}{۲} = ۲۵$
۱۰ تا ۵	$\frac{۵\times۱۰}{۲} = ۲۵$
۱۵ تا ۱۰	$\frac{۵(-۱۰)}{۲} = -۲۵$
۲۰ تا ۱۵	$\frac{۵(-۱۰)}{۲} = -۲۵$
۲۵ تا ۲۰	$\frac{۵\times۱۰}{۲} = ۲۵$



متحرک در لحظه‌های $t_۱$، $t_۲$ و $t_۳$ از مکان $x = ۶m$ می‌گذرد.

لحظهٔ $t_۳$ مربوط به سومین مرتبه‌ای است که از مکان $x = ۶m$ می‌گذرد.

گام دوم: شتاب حرکت را در بازهٔ زمانی ۲۰ s تا ۲۵ s به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱۰-۰}{۲۵-۲۰} = \frac{۱۰}{۵} = ۲\,m/s^۲$$

شتاب در بازهٔ زمانی ۲۰ s تا $t_۳$ نیز همین مقدار است.

گام سوم: در بازهٔ زمانی ۲۰ s تا $t_۳$ متحرک باید جابه‌جایی ۱۶m را داشته باشد تا از مکان $x = -۱۰m$ به مکان $x = +۶m$ برسد. معادلهٔ جابه‌جایی در این بازهٔ زمانی را می‌نویسیم و مقدار $t_۳$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \xrightarrow[t=t_۳-۲۰,\ v_۰=۰]{\Delta x=۱۶m,\ a=۲m/s^۲} ۱۶ = \frac{۱}{۲}\times۲(t_۳-۲۰)^۲ \Rightarrow ۱۶ = (t_۳-۲۰)^۲$$

$$\Rightarrow t_۳ - ۲۰ = \pm ۴ \Rightarrow \begin{cases} t_۳ = ۲۴s \text{ ق ق}, & (۲۰\,s < t_۳ < ۲۵\,s) \\ t_۳ = ۱۶s \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۵۱ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا تعیین می‌کنیم که در چه لحظه‌ای، تندی متحرک A از تندی متحرک B، ۶ m/s بیشتر است. برای این منظور، شتاب متحرک A را به دست آورده و معادلهٔ سرعت ـ زمان آن را می‌نویسیم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_A=\frac{۲۴-۰}{۱۰-۰}=۲/۴\ m/s^۲$$

$$v=at+v_۰ \xrightarrow[v_{۰A}=۰]{a_A=۲/۴\ m/s^۲} v_A=۲/۴t$$

$$v_A-v_B=۶ \xrightarrow[v_B=۲۴\ m/s]{v_A=۲/۴t} ۲/۴t-۲۴=۶ \Rightarrow ۲/۴t=۳۰ \Rightarrow t=\frac{۳۰}{۲/۴}=۱۲/۵s$$

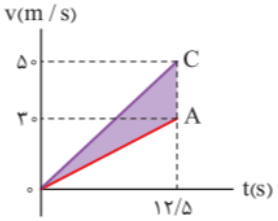
گام دوم: تندی هر یک از دو متحرک A و C را در لحظهٔ $t=۱۲/۵\ s$ به دست می‌آوریم:

$$v_A=۲/۴t \xrightarrow{t=۱۲/۵s} v_A=۲/۴\times ۱۲/۵=۳۰\ m/s$$

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_C=\frac{۲۴-۰}{۶-۰}=۴\ m/s^۲$$

$$v=at+v_۰ \xrightarrow[v_{۰C}=۰,\ t=۱۲/۵s]{a_C=۴\ m/s^۲} v_C=۴\times ۱۲/۵=۵۰\ m/s$$

گام سوم: با استفاده از مساحت سطح زیر نمودار سرعت ـ زمان، فاصلهٔ بین دو متحرک A و C را در لحظهٔ $t=۱۲/۵\ s$ به دست می‌آوریم:

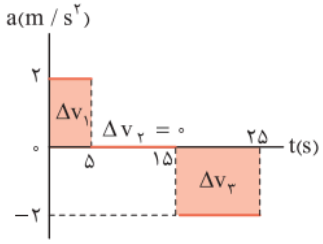


$$\Delta x_C-\Delta x_A=\frac{(v_C-v_A)۱۲/۵}{۲}$$

$$\Rightarrow \Delta x_C-\Delta x_A=\frac{(۵۰-۳۰)۱۲/۵}{۲}=۱۲۵\ m$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

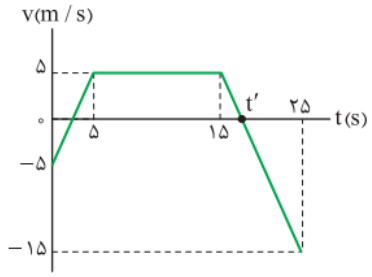
۲۵۲ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** با استفاده از مساحت سطح زیر نمودار شتاب ـ زمان در هر بازهٔ زمانی، تغییرات سرعت را به دست آورده و با استفاده از آن، نمودار سرعت ـ زمان متحرک را رسم می‌کنیم:



$$\Delta v_۱=۲\times ۵=۱۰\ m/s$$

$$\Delta v_۲=۰$$

$$\Delta v_۳=-۲(۲۵-۱۵)=-۲۰\ m/s$$



$$\Delta v_۱=v_۱-v_۰ \Rightarrow ۱۰=v_۱-(-۵) \Rightarrow v_۱=۵\ m/s$$

$$\Delta v_۲=v_۲-v_۱ \Rightarrow ۰=v_۲-۵ \Rightarrow v_۲=۵\ m/s$$

$$\Delta v_۳=v_۳-v_۲ \Rightarrow -۲۰=v_۳-۵ \Rightarrow v_۳=-۱۵\ m/s$$

گام دوم: در بازهٔ زمانی t' تا $t=۲۵s$، سرعت متحرک، منفی است یعنی در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و حرکت آن تندشونده است.

سرعت متوسط در این بازهٔ زمانی را به دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{v_{t'}+v_۳}{۲} \xrightarrow[v_۳=-۱۵\ m/s]{v_{t'}=۰} v_{av}=\frac{۰+(-۱۵)}{۲}=-۷/۵\ m/s$$

تندی متوسط با اندازهٔ سرعت متوسط، برابر است.

$$|v_{av}|=۷/۵\ m/s$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۵۳ پاسخ تشریحی **گام اول:** جابه‌جایی در t ثانیهٔ اول حرکت و با سرعت اولیهٔ $v_0 = 37 m/s$، برابر با $36 m$ داده‌شده؛ بنابراین داریم:

$$\text{جابه‌جایی در } t \text{ ثانیهٔ اول با سرعت اولیهٔ } v_0 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 36 = \frac{1}{2}at^2 + 37t \quad (I)$$

گام دوم: جابه‌جایی در $6t$ ثانیهٔ پایانی که سرعت متحرک در انتهای این بازهٔ زمانی صفر است، برابر با $36 m$ داده شده؛ بنابراین داریم:

$$\text{جابه‌جایی در } 6t \text{ ثانیهٔ پایانی با سرعت نهایی صفر} \Rightarrow \Delta x = \frac{-1}{2}a(6t)^2 + v_{\text{پایانی}}(6t)$$

$$36 = -\frac{1}{2}a(36t^2) + 0 \Rightarrow at^2 = -2 \quad (II)$$

گام سوم: به کمک رابطه‌های I و II در گام اول و دوم، شتاب حرکت را به دست می‌آوریم:

$$36 = \frac{1}{2}at^2 + 37t \xrightarrow{at^2=-2} 36 = \frac{-2}{2} + 37t \Rightarrow t = 1s$$

$$at^2 = -2 \xrightarrow{t=1s} a = -2 m/s^2$$

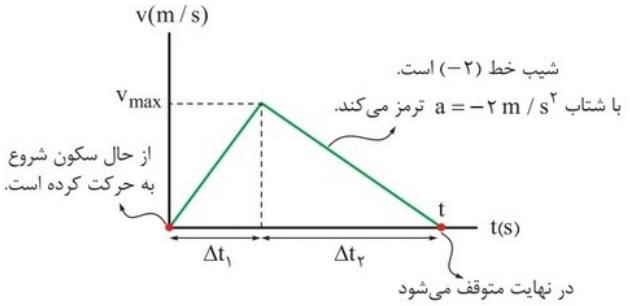
گام چهارم: حال که شتاب و سرعت اولیه و نهایی را داریم، جابه‌جایی جسم را در کل مسیر حرکت به کمک رابطهٔ $v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$ به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0^2 - (37)^2 = 2(-2)\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{37 \times 37}{4} = 342/25\ m$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۵۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** شکل زیر، نمودار سرعت ـ زمان خودرو را نشان می‌دهد.



گام دوم: تندی متوسط در $\Delta t_۱$ ثانیهٔ اول برابر با $۲۰\,m/s$ است. *(چون خودرو تغییر جهت نداده، پس می‌تونیم بگیم سرعت متوسط هم در این بازه همون $۲۰\,m/s$ است)*؛ بنابراین در بازهٔ زمانی $\Delta t_۱$ داریم:

$$v_{av}=\frac{v_۰+v_{max}}{۲}\Rightarrow ۲۰=\frac{۰+v_{max}}{۲}\Rightarrow v_{max}=۴۰\,m/s$$

گام سوم: مسافت طی‌شده در کل مسیر *(چون خودرو تغییر جهت نداده، می‌تونیم به مسافت بگیم جابه‌جایی)* برابر $۶۰۰\,m$ است؛ بنابراین مساحت محدود بین نمودار و محور زمان در کل t ثانیه، معادل $۶۰۰\,m$ است.

$$\frac{v_{max}\times t}{۲}=۶۰۰\Rightarrow\frac{۴۰\times t}{۲}=۶۰۰\Rightarrow t=۳۰\,s$$

گام چهارم: اندازهٔ شیب خط در بازهٔ زمانی $\Delta t_۲$، برابر ۲ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{v_{max}}{\Delta t_۲}=۲\Rightarrow\frac{۴۰}{\Delta t_۲}=۲\Rightarrow\Delta t_۲=۲۰\,s$$

$$\Delta t_۱+\Delta t_۲=۳۰\Rightarrow\Delta t_۱+۲۰=۳۰\Rightarrow\Delta t_۱=۱۰\,s$$

گام پنجم: اندازهٔ جابه‌جایی در ۷ ثانیهٔ دوم ($t_۱=۷\,s$ تا $t_۲=۱۴\,s$) را به دست می‌آوریم. در بازهٔ $۷\,s$ تا $۱۰\,s$، شتاب خودرو برابر با $a_۱=\frac{v_{max}}{\Delta t_۱}=\frac{۴۰}{۱۰}=۴\,m/s^۲$ است و در بازهٔ $۱۰\,s$ تا $۱۴\,s$ شتاب خودرو $a_۲=-۲\,m/s^۲$ است. حال جابه‌جایی را در این دو بازهٔ مختلف به دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم:

جابه‌جایی در بازهٔ $۷\,s$ تا $۱۰\,s$ برابر است با:

$$\Delta x_۱=-\frac{۱}{۲}a_۱t^۲+v_{۰}t$$

$$\Delta x_۱=-\frac{۱}{۲}(۴)(۳)^۲+۴۰(۳)=-۱۸+۱۲۰=۱۰۲\,m$$

جابه‌جایی در بازهٔ $۱۰\,s$ تا $۱۴\,s$ برابر است با:

$$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}a_۲t^۲+v_{۱۰}t$$

$$\Delta x_۲=\frac{۱}{۲}(-۲)(۴)^۲+۴۰(۴)=-۱۶+۱۶۰=۱۴۴\,m$$

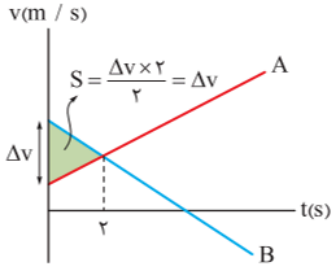
بنابراین جابه‌جایی خودرو در ۷ ثانیهٔ دوم حرکت برابر است با:

$$\Delta x_{(۷s-۱۴s)}=\Delta x_۱+\Delta x_۲=۱۰۲+۱۴۴=۲۴۶\,m$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

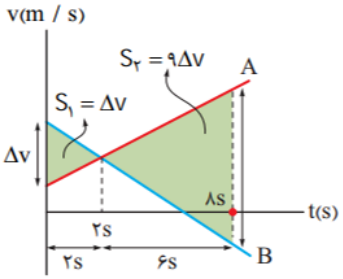
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۵۵ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** هر دو متحرک در مبدأ زمان در یک مکان قرار دارند، جابه‌جایی نسبی دو متحرک A و B را که برابر با مساحت محدود بین نمودارهای $(v-t)$ دو متحرک A و B است، در مدت ۲s مشخص می‌کنیم.



$$\Delta x_{AB} = \Delta v$$

گام دوم: مطابق شکل، جابه‌جایی نسبی دو متحرک A و B را پس از مدت‌زمان ۸s مشخص می‌کنیم:



دو مثلث هاشورخورده با نسبت تشابه $\frac{۶}{۲} = ۳$ با هم متشابه هستند؛ بنابراین نسبت مساحت مثلث هاشورخوردهٔ بزرگ‌تر به مثلث هاشورخوردهٔ کوچک‌تر، $(۳)^۲$ است.

$$\Delta x'_{AB} = +\Delta v - ۹\Delta v = -۸\Delta v$$

گام سوم: نسبت فاصلهٔ دو متحرک در $t = ۸s$ و $t = ۲s$ را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\Delta x'_{AB}}{\Delta x_{AB}} = \frac{|-۸\Delta v|}{\Delta v} = ۸$$

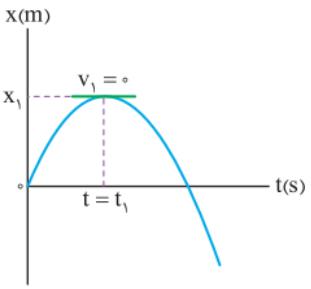
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۵۶ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** تندی متحرک هنگام عبور از مبدأ مکان ۲۴ m / s است. با توجه به تقارن سهمی، سرعت اولیه $+۲۴\ m/s$ است.

حال به کمک رابطهٔ $\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t$ در ۸ ثانیهٔ اول حرکت، شتاب متحرک را به دست می‌آوریم.

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow -۶۴ - ۰ = \frac{۱}{۲}a(۸)^۲ + ۲۴(۸) \xrightarrow{\div ۸} -۸ = ۴a + ۲۴ \Rightarrow -۳۲ = ۴a \Rightarrow a = -۸\ m/s^۲$$

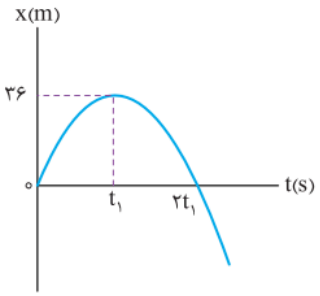
گام دوم: جابه‌جایی متحرک را از $t = ۰$ تا $t = t_۱$ (جایی که متحرک متوقف شده است) به دست می‌آوریم.



$$v_۱^۲ - v_۰^۲ = ۲a(x_۱ - x_۰)$$

$$\Rightarrow ۰^۲ - ۲۴^۲ = ۲(-۸)(x_۱ - ۰) \Rightarrow x_۱ = ۳۶\ m$$

گام سوم: مطابق شکل مقابل و با توجه به تقارن سهمی، مسافت طی‌شده در مدت‌زمانی که متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند $(۰ - ۲t_۱)$، برابر ۷۲ m است.



(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۵۷ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** اگر تندی متحرک A را v در نظر بگیریم، تندی متحرک B برابر ۲v است؛ بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک به صورت زیر است:

$$x_A = vt + x_{\circ A}$$

$$x_B = -۲vt + x_{\circ B}$$

توجه کنید که متحرک B در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند و سرعت آن منفی است.

گام دوم: دو متحرک در لحظهٔ $t = ۱۲\,s$ همدیگر را ملاقات می‌کنند و مکان‌های برابر دارند؛ بنابراین داریم:

$$x_A(t=۱۲\,s) = x_B(t=۱۲\,s) \Rightarrow ۱۲v + x_{\circ A} = -۲۴v + x_{\circ B} \Rightarrow ۳۶v = x_{\circ B} - x_{\circ A}$$

$$v = \frac{x_{\circ B} - x_{\circ A}}{۳۶} \xrightarrow[\text{مکان اولیهٔ B بالاتر از مکان اولیهٔ A است.}]{x_{\circ B} - x_{\circ A} = +۴۸\,m} v = \frac{+۴۸}{۳۶} = \frac{۴}{۳}\,m/s$$

گام سوم: متحرک B در لحظهٔ $t = ۱۲\,s$ از مکان $x = ۲۴\,m$ عبور کرده است. حال مکان اولیهٔ متحرک B را به دست می‌آوریم:

$$x_B = -\frac{۸}{۳}t + x_{\circ B} \xrightarrow{t=۱۲s\,,\,x_B=۲۴m} ۲۴ = -\frac{۸}{۳}(۱۲) + x_{\circ B} \Rightarrow x_{\circ B} = +۵۶\,m$$

$$-۲v = -\frac{۸}{۳}$$

گام چهارم: لحظه‌ای که متحرک B از مبدأ مکان $(x = ۰)$ عبور می‌کند را به دست می‌آوریم:

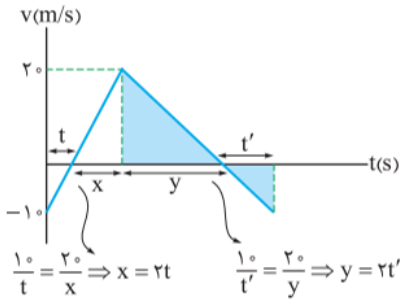
$$x_B = -\frac{۸}{۳}t + ۵۶ \xrightarrow{x_B = ۰} -\frac{۸}{۳}t + ۵۶ = ۰ \Rightarrow t = ۲۱\,s$$

گام پنجم: فاصلهٔ متحرک A از متحرک B را در لحظهٔ $t = ۲۱\,s$ به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{matrix} x_A = vt + x_{\circ A} \\ x_B = -۲vt + x_{\circ B} \end{matrix}\right\} \Rightarrow x_A - x_B = ۳vt + (x_{\circ A} - x_{\circ B}) \Rightarrow x_A - x_B = ۳(\frac{۴}{۳})(۲۱) - ۴۸ = ۸۴ - ۴۸ = ۳۶\,m$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

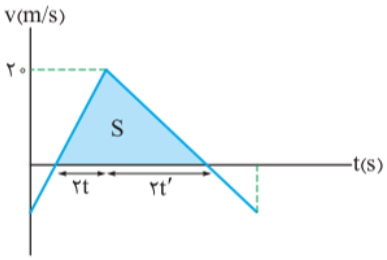
۲۵۸ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** مطابق شکل مقابل، مدت‌زمانی که طول کشیده تا سرعت از $-۱۰\,m/s$ به صفر برسد را t و مدت‌زمانی که طول کشیده تا سرعت از صفر به $-۱۰\,m/s$ برسد را t' در نظر می‌گیریم. حال به کمک شیب دو خط، مدت‌زمانی که سرعت از صفر به $۲۰\,m/s$ و از $۲۰\,m/s$ به صفر رسیده است را برحسب t و t' به دست می‌آوریم.



گام دوم: کل مدت‌زمان حرکت $۳۶\,s$ است، بنابراین داریم:

$$t + ۲t + ۲t' + t' = ۳۶ \Rightarrow ۳(t + t') = ۳۶ \Rightarrow t + t' = ۱۲\,s$$

گام سوم: مسافت طی‌شده در مدت‌زمانی که متحرک در جهت محور x حرکت کرده است (سرعت مثبت است) را به کمک مساحت محدود به نمودار v ـ t و محور زمان به دست می‌آوریم:

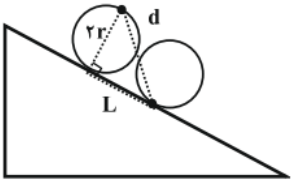


$$\ell = S = \frac{۲۰(۲t + ۲t')}{۲} = ۲۰(t + t') = ۲۰ \times ۱۲ = ۲۴۰\,m$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۵۹ هنگامی‌که چرخ به اندازهٔ نیم‌دور می‌چرخد، سنگ به‌اندازهٔ $d = v_{av}t$ جابه‌جا شده است. مطابق شکل داریم:



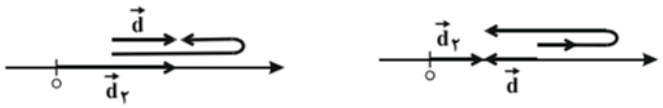
$$d = v_{av}t = \sqrt{۱۳}\times ۱ = \sqrt{۱۳}m \qquad L = \frac{۲\pi r}{۲} = \pi r$$

$$d = \sqrt{(۲r)^۲ + (L)^۲} = \sqrt{(۲r)^۲ + (\pi r)^۲} \Rightarrow \sqrt{۱۳} = \sqrt{۴r^۲ + \pi^۲ r^۲} \Rightarrow \sqrt{۱۳} = \sqrt{۱۳}r \Rightarrow r = ۱m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۰ گزینهٔ «۴» درست: چون اندازهٔ بردار جابه‌جایی کمتر از مسافت طی شده توسط متحرک است، پس جهت حرکت متحرک حداقل یک بار تغییر کرده است.

گزینهٔ «۲» نادرست: دو حالت زیر را در نظر بگیرید.

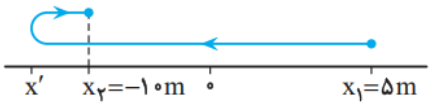


گزینهٔ «۳» نادرست: طبق تعریف تندی متوسط و سرعت متوسط، تندی متوسط طی این بازهٔ زمانی بیش‌تر از اندازهٔ سرعت متوسط است.

گزینهٔ «۱»: الزامی به منفی بودن جهت بردار جابه‌جایی طی این حرکت نیست.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۱ با توجه به این‌که متحرک فقط یک بار تغییر جهت داده است. نمودار مسیر حرکت به‌صورت زیر خواهد بود.



ابتدا مسافت طی شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\ell}{\Delta x} = ۲/۴ \xrightarrow{|\Delta x| = ۱۵m} \ell = ۲/۴ \times ۱۵ = ۳۶m$$

مسافت طی شده برابر مجموع اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در دو بازهٔ مطابق شکل بالاست، بنابراین داریم:

$$\ell = |x' - x_۱| + |x_۲ - x'| \xrightarrow[\ell = ۳۶m\ ,\ x_۱ = ۵m\ ,\ x_۲ = -۱۰m]{x' - x_۱ < ۰\ ,\ x_۲ - x' > ۰} \Rightarrow ۳۶ = ۵ - x' - ۱۰ - x' \Rightarrow x' = -۲۰/۵m$$

در نهایت بیشترین فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ شروع برابر است با:

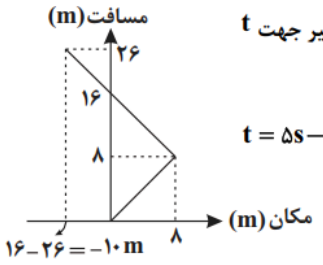
$$|x_{max}| = ۲۰/۵ + ۵ = ۲۵/۵m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۶۲ نمودار مسافت برحسب مکان این متحرک در ابتدا به‌صورت یک خط با شیب ۱ است. در لحظه‌ای که جهت حرکت متحرک عوض می‌شود، شیب خط ۱- می‌شود. چون معادلهٔ مکان برحسب زمان درجهٔ ۲ است (سهمی است) بنابراین مسافت طی شده توسط متحرک از لحظهٔ شروع حرکت تا لحظه‌ای که جهت حرکت آن عوض می‌شود، برابر است با مسافت طی شده توسط متحرک از لحظهٔ تغییر جهت حرکت تا لحظه‌ای که متحرک از مبدأ حرکت عبور می‌کند. پس متحرک در لحظهٔ تغییر جهت حرکت در مکان $x=+8m$ قرار دارد. پس از مکان $x=+8m$ جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند و پس از آن متحرک درجهت منفی محور x ها حرکت می‌کند. بنابراین در لحظه‌ای که مسافت طی شده برابر با ۲۶ متر است، با توجه به نمودار مکان – زمان، مکان متحرک در این لحظه برابر است با:

$$16-26=-10m$$

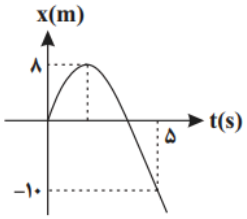


$$t_{\text{تغییر جهت}}=\frac{-n}{2m}\Rightarrow x=m(\frac{-n}{2m})^2+n(\frac{-n}{2m})\Rightarrow x=\frac{n^2}{4m}-\frac{n^2}{2m}=\frac{-n^2}{4m}\xrightarrow{x=8m}8=\frac{-n^2}{4m}\Rightarrow m=\frac{-n^2}{32}\ (*)$$

$$t=5s\xrightarrow[x=mt^2+nt]{x=-10m}-10=25m+5n$$

$$-2=5m+n\xrightarrow{(*)}-2=-\frac{5n^2}{32}+n\Rightarrow -64=-5n^2+32n$$

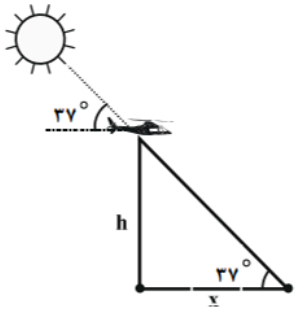
$$\Rightarrow 5n^2-32n-64=0\Rightarrow n=\frac{16\pm\sqrt{16^2+64\times5}}{5}\Rightarrow\begin{cases}n=\frac{16+24}{5}=8\Rightarrow m=\frac{-2-8}{5}=-2\\ n=\frac{16-24}{5}=\frac{-8}{5}\end{cases}$$



با توجه به نمودار، حاصل جمع دو ریشه باید عددی مثبت باشد. یعنی $\frac{-n}{m}>0$ و چون $m<0$ بنابراین $n>0$ است. لذا جواب $n=\frac{-8}{5}$ قابل قبول نمی‌باشد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۶۳ با توجه به حرکت عمودی پهپاد و حرکت افقی سایه بر روی سطح زمین می‌توانیم از مفهوم $\tan\alpha$ برای حل این مسئله کمک بگیریم:



$$h=v_{av}\Delta t=10\times6=60m$$

$$\tan\alpha=\frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}\Rightarrow\tan37^\circ=\frac{h}{x}$$

$$\Rightarrow x=\frac{h}{\tan37^\circ}=\frac{60}{\frac{3}{4}}=80m$$

بنابراین: $(v_{av})_{\text{سایه}}=\frac{x}{\Delta t}=\frac{80}{6}=\frac{40}{3}\frac{m}{s}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۶۴ برای حل به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم قبل از آن باید دانست s_{av} یک عدد مثبت است و از طرف دیگر فقط هنگامی $|\vec{v}_{av}| = s_{av}$ است که اولاً متحرک روی خط راست در حرکت باشد ثانیا در طی حرکت تغییر جهت ندهد، به عبارت دیگر همواره $s_{av} \geq |v_{av}|$ است.

گزینهٔ «۱» نادرست است: چون اگر $\vec{v}_{av} = s_{av}\vec{i}$ باشد، متحرک بدون تغییر جهت در سوی مثبت محور در حرکت است.

گزینهٔ «۲» نادرست است: چون اگر $\vec{v}_{av} = -s_{av}\vec{i}$ باشد، متحرک در جهت منفی محور در حرکت است.

گزینهٔ «۳» نادرست است: چون همواره $s_{av} \geq |\vec{v}_{av}|$ است و نامساوی مطرح شده در این گزینه برقرار نیست.

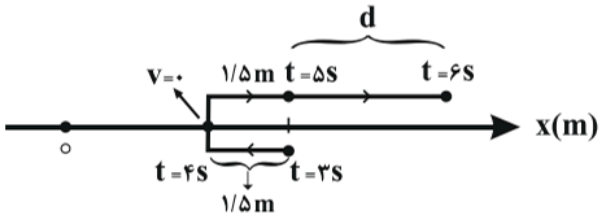
گزینهٔ «۴» درست است: چون اگر $\vec{v}_{av} = -s_{av}\vec{i}$ باشد، به خاطر برابری بزرگی آن‌ها، متحرک الزاماً تغییر جهت نخواهد داد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۵ در ابتدا مسافت طی شده توسط متحرک در ۳ ثانیهٔ دوم را می‌یابیم (بین دو لحظهٔ $t = ۳s$ و $t = ۶s$). با معلوم بودن s_{av} داریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۳s]{s_{av} = ۲/۵ \frac{m}{s}} ۲/۵ = \frac{\ell}{۳} \Rightarrow \ell = ۷/۵m$$

از طرفی با توجه به مسیر حرکت و نیز نمودار $x - t$ که یک سهمی است، مسیر حرکت متحرک به‌صورت زیر است:



$$\ell = ۱/۵ + ۱/۵ + d \xrightarrow{\ell = ۷/۵m} d = ۴/۵m$$

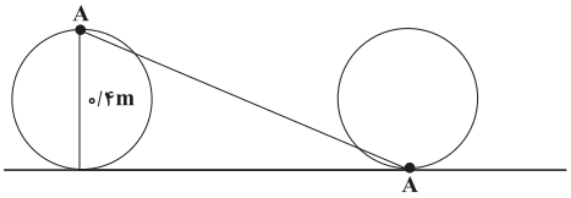
و برای تعیین سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{d}{\Delta t} = \frac{۴/۵}{۳} \Rightarrow v_{av} = ۱/۵ \frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

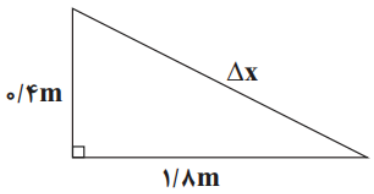
۲۶۶ نکته: جابه‌جایی فاصلهٔ مستقیم بین نقطهٔ شروع و پایان حرکت است.

با توجه به صورت سؤال، در هر ۰/۲ ثانیه این چرخ یک دور کامل می‌زند. پس از $۰/۳s$، این چرخ $۱/۵$ دور در جهت پادساعتگرد طی می‌کند و داریم:



*دقت کنید که جابجایی افقی مرکز این چرخ $۱/۵$ برابر محیط چرخ است.

$$۱/۵ \times P = ۲\pi r + \pi r = ۳\pi r = ۳ \times ۳ \times ۰/۲ = ۱/۸m$$



$$\Delta x = \sqrt{۰/۴^۲ + ۱/۸^۲} = \boxed{۰/۲\sqrt{۸۵}m}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۶۷ معادلهٔ حرکت هر یک از دو متحرک را می‌نویسیم و در لحظهٔ $t = ۲۰s$ مکان هر یک را مشخص می‌کنیم:

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۰-(-۱۲۰)}{۸} = ۱۵m/s \qquad x_A = v_A t + x_{۰A} \Rightarrow x_A = ۱۵t - ۱۲۰$$

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۰-۹۰}{۱۲} = \frac{-۹۰}{۱۲} = -۷/۵m/s \qquad x_B = V_B t + x_{۰B} = -۷/۵t + ۹۰ \Rightarrow x_B = -۷/۵t + ۹۰$$

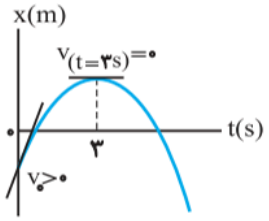
به ازاء $t = ۲۰s$، x_A و x_B را به دست می‌آوریم.

$$x_A = ۱۵\times ۲۰ - ۱۲۰ = ۳۰۰ - ۱۲۰ = ۱۸۰m \qquad x_B = -۷/۵\times ۲۰ + ۹۰ = -۱۵۰ + ۹۰ = -۶۰m$$

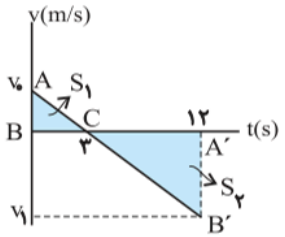
$$l = x_A - x_B = ۱۸۰ - (-۶۰) = ۲۴۰m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۸ شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان در هر لحظهٔ دلخواه t برابر با سرعت متحرک در همان لحظه است، دراینجا شیب خط مماس در $t = ۰$ مثبت است پس $v_۰ > ۰$ و در $t = ۳s$، سرعت صفر است.



با توجه به این نکات نمودار سرعت – زمان را رسم می‌کنیم. چون مساحت محصور بین نمودار سرعت – زمان و محور زمان برابر با جابه‌جایی و حاصل جمع اندازهٔ جابه‌جایی‌ها برابر با مسافت طی شده است، پس داریم: $\ell = S_۱ + S_۲$



از طرفی با توجه به تشابه مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{A'B'C}$ داریم:

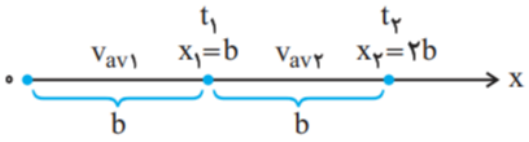
$$\frac{v_۰}{۳} = \frac{|v_۱|}{۹} \Rightarrow v_۱ = -۳v_۰$$

$$v_{av} = \frac{\frac{۳v_۰}{۲} - \frac{۹|v_۱|}{۲}}{۱۲} = \frac{۳v_۰ - ۲۷v_۰}{۲۴} = -v_۰ = -۶\frac{m}{s}$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow ۷/۵ = \frac{\frac{۳v_۰}{۲} + \frac{۹|v_۱|}{۲}}{۱۲} \Rightarrow ۷/۵ = \frac{۳v_۰ + ۲۷v_۰}{۲۴} \Rightarrow v_۰ = ۶\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۶۹ با توجه به شکل از محور زمان و این که $x_۱ = b$ و $x_۲ = ۲b$ است، درمی‌یابیم که جابه‌جایی متحرک در هر دو بازه یکسان و برابر b است، بنابراین داریم:



$$v_{av} = \frac{\Delta x_۱ + \Delta x_۲}{t_۱ + t_۲} = \frac{b+b}{\frac{b}{v_{av۱}} + \frac{b}{v_{av۲}}} = \frac{۲b}{\frac{v_{av۲}b + v_{av۱}b}{v_{av۱}v_{av۲}}} = \frac{۲bv_{av۱}v_{av۲}}{b(v_{av۱} + v_{av۲})} = \frac{۲v_{av۱}v_{av۲}}{v_{av۱} + v_{av۲}}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۷۰ ابتدا سرعت متوسط متحرک را به‌صورت پارامتری بین لحظات t_1 و t_2 به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{(t_2^3-20t_2+8)-(t_1^3-20t_1+8)}{t_2-t_1} \Rightarrow v_{av}=\frac{t_2^3-t_1^3-20(t_2-t_1)+8-8}{t_2-t_1}$$

$$\Rightarrow v_{av}=\frac{(t_2-t_1)(t_2^2+t_1t_2+t_1^2)-20(t_2-t_1)}{t_2-t_1} \Rightarrow v_{av}=t_1^2+t_2^2+t_1t_2-20=(t_1+t_2)^2-t_1t_2-20$$

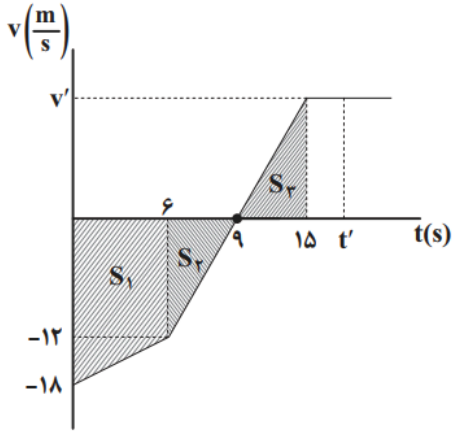
اکنون با توجه به رابطهٔ به‌دست آمده برای سرعت متوسط، اندازهٔ سرعت متوسط را برای هریک از گزینه‌ها به‌دست می‌آوریم:

گزینهٔ «۱»: $|v_{av}|=|1^2-1\times0-20|=19\frac{m}{s}$ گزینهٔ «۲»: $|v_{av}|=|4^2-4\times0-20|=4\frac{m}{s}$

گزینهٔ «۳»: $|v_{av}|=|5^2-4\times1-20|=1\frac{m}{s}$ گزینهٔ «۴»: $|v_{av}|=|7^2-3\times4-20|=17\frac{m}{s}$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۷۱



ابتدا جابه‌جایی متحرک را در مدت زمانی که در جهت منفی محور xها حرکت می‌کند، مشخص می‌کنیم:

$$\Delta x_1=S_1+S_2=-\frac{(18+12)\times6}{2}-\frac{3\times12}{2}=-108m$$

در قسمتی که متحرک در جهت مثبت محور xها حرکت کرده، ابتدا v' را به‌دست می‌آوریم. چون در بازهٔ زمانی $t=6s$ تا $t=15s$ حرکت با شتاب ثابت است، داریم:

$$a=\frac{v_{9s}-v_{6s}}{9-6}=\frac{0-(-12)}{3}=4\frac{m}{s^2}$$
$$a=\frac{v_{15s}-v_{9s}}{15-9}=\frac{v'-0}{6}=\frac{v'}{6}\frac{m}{s^2} \Rightarrow \frac{v'}{6}=4 \Rightarrow v'=24\frac{m}{s}$$

حال جابه‌جایی متحرک تا این لحظه را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x_2=S_3=\frac{6\times24}{2}=72m$$

برای آن‌که متحرک به نقطهٔ حرکت خود بازگردد، باید $\Delta x=0$ باشد. بنابراین متحرک پس از لحظهٔ $t=15s$ بایستی به اندازهٔ $36m$ دیگر در جهت مثبت محور xها جابه‌جا شود.

$$\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3=0 \Rightarrow -108+72+\Delta x_3=0 \quad \Rightarrow \Delta x_3=(t'-15)24=36 \Rightarrow t'=16/5s$$

حال اگر شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t=11s$ تا $t'=16/5s$ را a_1 بنامیم، خواهیم داشت:

$$a_1=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{24-8}{5/5}=\frac{16}{5/5}=\frac{160}{55}\frac{m}{s^2} \qquad a_2=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-12-(-18)}{6}=1\frac{m}{s^2} \qquad \Rightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{\frac{160}{55}}{1}=\frac{32}{11}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۷۲

$$d_1=\frac{d}{2},d_2+d_3=\frac{d}{2} \xrightarrow[t_2=\frac{1}{3}(t_2+t_3)\Rightarrow t_2-\frac{1}{3}t_2=\frac{1}{3}t_3\Rightarrow\frac{2}{3}t_2=\frac{t_3}{3}\Rightarrow\frac{t_2}{t_3}=\frac{1}{2}}{d_2=(v_{av})_2t_2\,,d_3=(v_{av})_3t_3} ((v_{av})_2+2(v_{av})_3)t_2=\frac{d}{2}$$

$$\Rightarrow t_2=\frac{d}{2(v_{av})_2+4(v_{av})_3},t_3=\frac{d}{(v_{av})_2+2(v_{av})_3}$$

$$v_{av}=\frac{d_1+d_2+d_3}{t_1+t_2+t_3}=\frac{d}{\frac{d}{2(v_{av})_1}+\frac{d}{2(v_{av})_2+4(v_{av})_3}+\frac{d}{(v_{av})_2+2(v_{av})_3}}$$

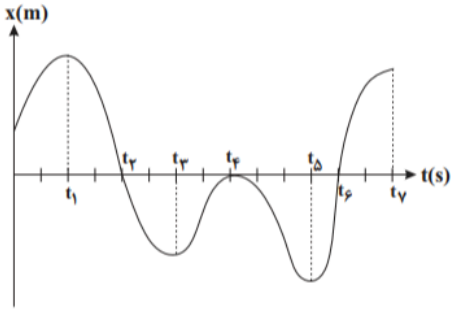
$$\Rightarrow v_{av}=\frac{1}{\frac{1}{2(v_{av})_1}+\frac{1}{2(v_{av})_2+4(v_{av})_3}+\frac{1}{(v_{av})_2+2(v_{av})_3}} \xrightarrow{(v_{av})_1=15\frac{m}{s},(v_{av})_2=8\frac{m}{s},(v_{av})_3=5\frac{m}{s}} v_{av}=\frac{1}{\frac{1}{30}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}}=\frac{60}{7}\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۷۳

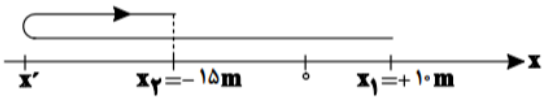
با توجه به این‌که علامت شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان، تعیین‌کنندهٔ جهت حرکت متحرک است، بنابراین حرکت متحرک در بازهٔ t_1 تا t_3 و t_4 تا t_5 در خلاف جهت محور x است.

هر بار که متحرک از مبدأ عبور می‌کند و به‌سمت دیگر آن می‌رود، جهت بردار مکان‌تغییر می‌کند یعنی ۲ بار. دقت کنید که متحرک در لحظهٔ t_4 از مبدأ عبور نکرده است، بلکه فقط در مبدأ متوقف شده است و دوباره برگشته است.



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۴



ابتدا مسافت طی‌شده توسط متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{\ell}{|\Delta x|}=2/4 \xrightarrow{|\Delta x|=|-15-10|=25m} \ell=2/4\times25$$

$$\Rightarrow \ell=60m$$

با توجه به نمودار بالا، مسافت طی‌شده برابر با مجموع اندازه‌های جابه‌جایی متحرک در بازه‌های زمانی است که جهت حرکت آن تغییر نکرده است.

$$\ell=|x'-x_1|+|x_2-x'| \xrightarrow[\ell=60m,x_1=+10m,x_2=-15m]{x'-x_1<0,x_2-x'>0} 60=10-x'+(-15-x')\Rightarrow x'=-32/5m$$

بیش‌ترین فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ شروع حرکت $42/5\,m$ است. $10+32/5=42/5$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۷۵ گزینهٔ «۱» نادرست است. متحرک در بازهٔ زمانی $۳s$ تا $۱۰s$ در جهت مثبت محور x و در بازهٔ زمانی $۱۴s$ تا $۱۸s$ در جهت منفی محور حرکت می‌کند. بنابراین در لحظهٔ $۸s$ رو به سوی مثبت و در لحظهٔ $۱۶s$ رو به سوی منفی در حرکت است و تغییر جهت نمی‌دهد.

گزینهٔ «۲» درست است. متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا $۳s$ و $۱۴s$ تا $۱۸s$ و درمجموع به مدت $۷s$ در خلاف جهت محور x حرکت نموده است.

گزینهٔ «۳» نادرست است. در بازهٔ زمانی $۱۰s$ تا $۱۴s$ و به مدت ۴ ثانیه متحرک‌ساکن و در نتیجه سرعت آن صفر بوده است.

گزینهٔ «۴» نادرست است. تندی متوسط برابر مسافت طی شده تقسیم بر بازهٔ زمانی‌است. چون برای جسم در حال حرکت، هیچ وقت مسافت طی شده صفر نمی‌شود، لذا تندی متوسط نیز صفر نخواهد شد.

دقت کنید، در بازهٔ زمانی صفر تا ۱۶ ثانیه چون جابه‌جایی متحرک صفر می‌باشد،سرعت متوسط آن صفر خواهد شد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۶ در حرکت با سرعت ثابت، جابه‌جایی متناسب با زمان است.

$$x = v\Delta t + x_{\circ} \Rightarrow \Delta x = v\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta x_۱}{\Delta x_۲} = \frac{\Delta t_۱}{\Delta t_۲}$$

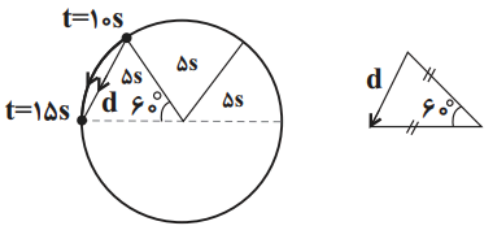
با توجه به این‌که اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۲s$ تا $t_۲ = ۶s$ برابر با $|\Delta x| = |-۱۵ - ۷| = ۲۲m$ است، بنابراین در هر بازهٔ زمانی ۴ ثانیه‌ای دیگر نیز اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر با $۲۲m$ خواهد بود.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۷ ابتدا باید حساب کنیم که در ۵ ثانیهٔ سوم حرکت، متحرک چه قسمتی از محیط دایره را طی می‌کند؟

$$\frac{\text{بازهٔ زمانی}}{\text{مدت زمان یک دور}} = \frac{۵}{۳۰} = \frac{۱}{۶}$$

متحرک در مدت $۵s$، $\frac{۱}{۶}$ محیط دایره را طی می‌کند



کمان طی شده برابر ۶۰° است.

پس:

تشکیل مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند و جابه‌جایی برابر شعاع دایره خواهد بود.

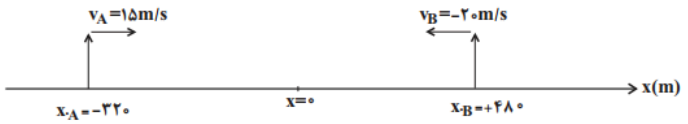
$$r - \frac{۱}{۶}(۲\pi r) = -۵۶cm \qquad r - \frac{۳/۱۴r}{۳} = \frac{-۵۶}{۱۰۰} \Rightarrow ۰/۵۶ = \frac{۰/۱۴r}{۳}$$

$$r = \frac{۰/۵۶ \times ۳}{۰/۱۴} = ۱۲m \qquad s = \frac{L}{\Delta t} = \frac{۲ \times ۳/۱۴ \times ۱۲}{۳۰} = ۲/۵۱۲\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۷۸ با توجه به شکل زیر، برای اینکه دو متحرک در فاصلهٔ $۵۲/۵$ متری از یکدیگر قرار گیرند، می‌توان نوشت:



$$x_B - x_A = ۵۲/۵m \Rightarrow -۲۰t_۱ + ۴۸۰ - ۱۵t_۱ + ۳۲۰ = ۵۲/۵ \Rightarrow t_۱ = \frac{۸۰۰ - ۵۲/۵}{۳۵}s$$

$$x_A - x_B = ۵۲/۵m \Rightarrow ۱۵t_۲ - ۳۲۰ + ۲۰t_۲ - ۴۸۰ = ۵۲/۵ \Rightarrow t_۲ = \frac{۸۰۰ + ۵۲/۵}{۳۵}$$

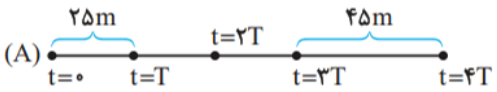
در نهایت اختلاف دو زمان $t_۱$ و $t_۲$ را به دست می‌آوریم:

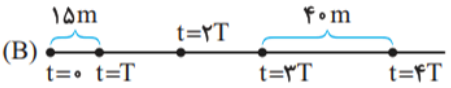
$$t_۲ - t_۱ = \frac{۸۰۰ + ۵۲/۵}{۳۵} - \frac{۸۰۰ - ۵۲/۵}{۳۵} = \frac{۱۰۵}{۳۵} = ۳s$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۷۹ در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی متحرک در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی T تشکیل دنبالهٔ عددی با قدر نسبت $aT^۲$ می‌دهند، بنابراین اگر جابه‌جایی در T ثانیهٔ اول $\Delta x_۱$ و در T ثانیهٔ nام Δx_n باشد، خواهیم داشت:

$$\Delta x_n = \Delta x_۱ + (n-۱)aT^۲$$





با این نکته برای متحرک A داریم:

$$\Delta x_۴ = \Delta x_۱ + (۴-۱)a_A T^۲ \Rightarrow ۴۵ = ۲۵ - ۳a_A T^۲ \quad \Rightarrow a_A T^۲ = \frac{۲۰}{۳} \qquad (۱)$$

برای متحرک B داریم:

$$\Delta x_۴ = \Delta x_۱ + (۴-۱)a_B T^۲ \Rightarrow ۴۰ = ۱۵ + ۳a_B T^۲ \quad \Rightarrow a_B T^۲ = \frac{۲۵}{۳} \qquad (۲)$$

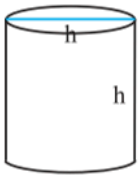
و

$$\frac{(۱)}{(۲)} \Rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \frac{\frac{۲۰}{۳}}{\frac{۲۵}{۳}} = \frac{۲۰}{۲۵} = \frac{۴}{۵}$$

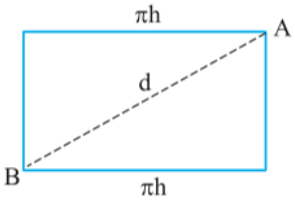
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۸۰ کوتاه‌ترین طول پلهٔ این مخزن برابر قطر مستطیلی است که با باز کردن استوانه، در سطح جانبی آن به دست می‌اید مطابق شکل زیر داریم:







$$d=\sqrt{h^2(1+\pi^2)}=h\sqrt{1+\pi^2} \qquad \frac{d}{h}=\frac{h\sqrt{1+\pi^2}}{h}=\sqrt{1+\pi^2}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۸۱ دو قطار زمانی از کنار هم به‌طور کامل رد می‌شوند که مکان انتهای دو قطار یکسان شود. بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان دو قطار را برای انتهای آن‌ها می‌نویسیم:

$$x \text{ درجهت مثبت محور } v_1=54\frac{km}{h}=\frac{54}{3/6}\frac{m}{s}=15\frac{m}{s} \qquad x \text{ درجهت منفی محور } v_2=-108\frac{km}{h}=\frac{-108}{3/6}\frac{m}{s}=-30\frac{m}{s}$$

$$x'_A=x_A-\ell_1=-200-300=-500m \qquad x'_B=x_B+\ell_2=600+400=1000m$$

$$\text{قطار (۱)}: x_1=v_1t+x'_A\Rightarrow x_1=15t-500$$
$$\text{قطار (۲)}: x_2=v_2t+x'_B\Rightarrow x_2=-30t+1000$$

$$\xrightarrow{x_1=x_2} t=\frac{1500}{45}=\frac{100}{3}s \xrightarrow[x_A=15t-200]{t=\frac{100}{3}s} x_A=15\times\frac{100}{3}-200=300m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۸۲ در حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم، جابه‌جایی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{v_1+v_2}{2}$$

ثانیهٔ پنجم یعنی بازهٔ زمانی $t_1=4s$ تا $t_2=5s$، برای محاسبهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ پنجم، سرعت را در لحظه‌های $t_1=4s$ و $t_2=5s$ به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$v=at+v_0 \xrightarrow[v_0=18\frac{m}{s}]{t=4s} v_1=4a+18 \qquad v=at+v_0 \xrightarrow[v_0=18\frac{m}{s}]{t=5s} v_2=5a+18$$

در ثانیهٔ پنجم جابه‌جایی برابر با صفر است، بنابراین:

$$\Delta x=0 \Rightarrow v_1+v_2=0 \Rightarrow 4a+18+5a+18=0 \Rightarrow a=-4\frac{m}{s^2}$$

برای محاسبهٔ مسافت طی شده در ۱۰ ثانیهٔ ابتدایی حرکت، جابه‌جایی متحرک را در لحظات قبل و بعد از آن‌که سرعتش صفر شود، محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$v=at+v_0 \Rightarrow v=-4t+18=0 \Rightarrow t=4/5s \qquad \Delta x_1=\frac{v_0+v'}{2}\Delta t_1=\frac{18+0}{2}\times(4/5-0) \Rightarrow \Delta x_1=\frac{81}{2}m$$

$$v''=-4\times10+18 \Rightarrow v''=-22\frac{m}{s} \qquad \Delta x_2=\frac{v'+v''}{2}\Delta t_2=\frac{0+(-22)}{2}(10-4/5) \Rightarrow \Delta x_2=-\frac{121}{2}m$$

بنابراین:

$$\text{مسافت طی شده}=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=\frac{81}{2}+\frac{121}{2}=101m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۳ با استفاده از معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت، ابتدا سرعت متحرک را در مکان $x_1=25m$ به دست می‌آوریم:

$$v_1^2-v_0^2=2a_1\Delta x \xrightarrow{\Delta x=25m,a_1=-2m/s^2,v_0=10m/s} v_1^2-10^2=-2\times2\times25 \Rightarrow v_1=0$$

با استفادهٔ مجدد معادلهٔ سرعت- جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متحرک را در مکان $x_2=61m$ به‌دست می‌آوریم:

$$v_2^2-v_1^2=2a_2\Delta x' \xrightarrow[a_2=2\ m/s^2,v_1=0]{\Delta x'=61-25=36m} v_2^2=2\times2\times36 \Rightarrow v_2=12m/s$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۸۴ معادلهٔ مکان زمان متحرکی که بر مسیر مستقیم با شتاب ثابت حرکت می‌کند از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$$

با توجه به نمودار داریم:

$$\xrightarrow[x=0,x_0=10m]{t=3s}\frac{9}{2}a+3v_0+10=0\Rightarrow 9a+6v_0+20=0\ (1)$$

$$\xrightarrow[x=0,x_0=10m]{t=8s}32a+8v_0+10=0\Rightarrow 16a+4v_0+5=0\ (2)$$

$$\xrightarrow{(2),(1)}\begin{cases}9a+6v_0=-20\\16a+4v_0=-5\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=\frac{5}{6}\frac{m}{s^2},v_0=\frac{-27/5}{6}m/s$$

حال برای به دست آوردن سرعت متحرک در لحظهٔ عبور از مبدأ مکان داریم:

$$v=at+v_0\xrightarrow[v_0=\frac{-27/5}{6}m/s]{a=\frac{5}{6}m/s^2}v=\frac{5}{6}t-\frac{27/5}{6}\xrightarrow{t=3s}v=\frac{5}{6}\times 3-\frac{27/5}{6}=\frac{15-27/5}{6}=\frac{-12/5}{6}\qquad |v|=\frac{25}{12}m/s$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۸۵ برای به دست آوردن مسافت و یا تندی باید حواسمان به نقاط تغییر جهت باشد (یعنی لحظه‌ای که مکان متحرک $x=-2m$ است.)

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_4-(-1)}{4}=\frac{x_4+1}{4}$$

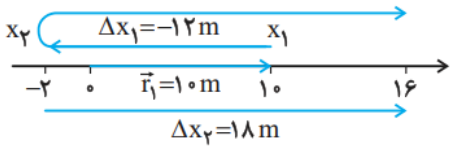
$$s_{av}=\frac{l}{t}=\frac{1+2+x_4}{4}=\frac{3+x_4}{4}$$

$$\Rightarrow s_{av}-v_{av}=\frac{(3+x_4)-(x_4+1)}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۸۶ ابتدا مسیر حرکت متحرک روی محور xها را مشخص می‌کنیم. مکان متحرک در $t_1 = 2s$ برابر $x_1 = 10m$ است.



حال x_2 را می‌یابیم:

$$\Delta x_1 = v_{av_1} \times \Delta t_1 \xrightarrow{v_{av_1} = -6\,m/s\ ,\ \Delta t_1 = 4-2 = 2s} \Delta x_1 = -6 \times 2 = -12m$$

اکنون اگر روی محور $12m$ به چپ برویم به $x_2 = -2m$ می‌رسیم.

در مرحلهٔ دوم داریم:

$$\Delta x_2 = v_{av_2} \times \Delta t_2 \xrightarrow{v_{av_2} = 3\,m/s\ ,\ \Delta t_2 = 6s} \Delta x_2 = 3 \times 6 = 18m$$

بنابراین سرعت متوسط کل به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{-12+18}{2+6} = \frac{6}{8} = 0/75\,m/s$$

برای یافتن مکان پایانی (x_3) از شکل کمک می‌گیریم. با توجه به مسیر حرکت و تغییر جهت، ابتدا از $+10m$ به $-2m$ و از این نقطه به $+16m$ می‌رسد و نقطهٔ پایانی و بردار مکان آن به‌صورت زیر می‌باشد:

$$x_3 = 16m \Rightarrow \vec{r}_3 = 16\vec{i}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۷ بررسی گزینه‌ها:

۱) شتاب متوسط در بازهٔ زمانی ۰ تا $4s$ برابر است با:

$$a_{av(0-4s)} = \frac{v_4 - v_0}{4-0} = \frac{0-0}{4} = 0$$

۲) برای به دست آوردن سرعت متوسط متحرک در بازهٔ ۰ تا $6s$ جابه‌جایی متحرک‌را می‌یابیم:

ابتدا جابه‌جایی متحرک در بازهٔ ۰ تا $2s$ را می‌یابیم:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_{0-2s} &= \frac{v+0}{2} \times 2 = v \\ \Delta x_{2s-6s} &= \frac{v-v}{2} \times 4 = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta x_t = v + 0 = v$$

که در نتیجه گزینهٔ «۲» صحیح نیست.

$$v_{av(0-6s)} = \frac{\Delta x_t}{\Delta t} = \frac{v}{6}$$

۳) در بازهٔ $2s$ تا $6s$ داریم:

$$\Delta x = \frac{v-v}{2} \times 4 = 0$$

۴) ابتدا جابه‌جایی متحرک را می‌یابیم:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_{0-2s} &= \frac{0+v}{2} \times 2 = v \\ \Delta x_{2s-6s} &= \frac{v-v}{2} \times 4 = 0 \\ \Delta x_{6s-8s} &= \frac{-v+0}{2} \times 2 = -v \\ \bar{v}_{0-8s} &= \frac{0}{8} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta x_t = v + 0 - v = 0$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۸۸ اگر دو متحرک با هم به خط‌چین **B** برسند، جابه‌جایی‌ها برابر خواهند بود. فقط دقت کنید که اگر مدت زمان حرکت متحرک **A**، **t** ثانیه باشد، مدت زمان حرکت متحرک **B**، $(t-۱)$ ثانیه خواهد بود، پس:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow v_A t = v_B(t-۱)$$

$$\Rightarrow ۲۰t = ۳۰(t-۱) \Rightarrow ۱۰t = ۳۰ \Rightarrow t = ۳s$$

پس مدت زمان حرکت متحرک **A**، **۳s** و مدت زمان حرکت متحرک **B**، $(۳-۱=۲s)$ است. حال می‌توان فاصلهٔ دو خط‌چین (۱) و (۲) را به یکی از دو روش زیر حساب کرد:

$$\Delta x_A = v_A.t = ۲۰\times ۳ = ۶۰m \quad \text{یا} \quad \Delta x_B = v_B.(t-۱) = ۳۰\times ۲ = ۶۰m$$

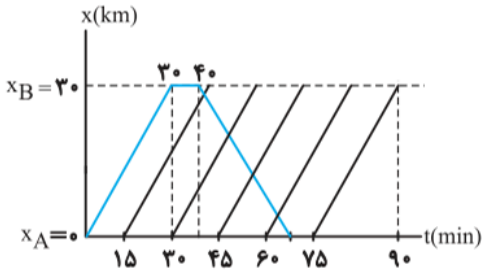
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸۹ زمان ۶ صبح را $t=۰$ و پایانهٔ **A** را $x=۰$ در نظر می‌گیریم. چون سرعت ثابت است، پس زمان رسیدن قطار اول به پایانهٔ **B** برابر است با:

$$\Delta x = v\Delta t \xrightarrow[v=۶۰km/h]{\Delta x=۳۰km} \Delta t = \frac{۳۰}{۶۰} = \frac{۱}{۲}h = ۳۰min$$

قطار اول ۱۰ دقیقه در پایانهٔ **B** توقف می‌کند و دوباره ۳۰ دقیقه طول می‌کشد تا به پایانهٔ **A** برگردد.

$$t_{\circledR} = ۳۰+۱۰+۳۰ = ۷۰min$$



حال نمودار مکان زمان قطارها را رسم می‌کنیم تا پاسخ مسئله را بیابیم.

مطابق نمودار، نمودار مکان – زمان قطار اول (ذوزنقه) با نمودار قطارهای (۲)، (۳)، (۴) و (۵) برخورد می‌کند پس قطار اول با ۴ قطار دیدار می‌کند.

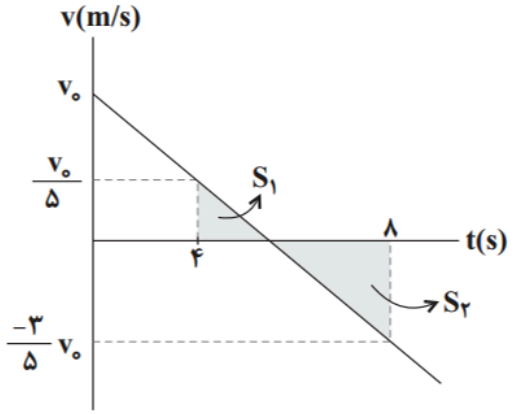
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۹۰

با توجه به اینکه نمودار مکان – زمان متحرک که به صورت سهمی است، پس حرکت با شتاب ثابت بوده و در لحظهٔ $t = ۵s$ جهت حرکت متحرک عوض شده است.

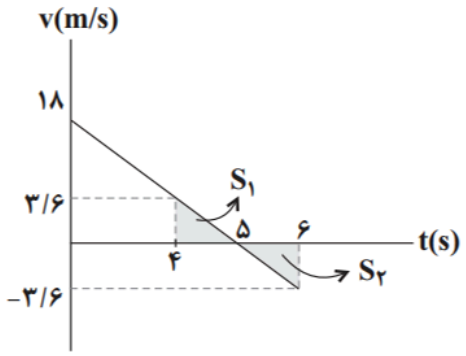
بنابراین نمودار سرعت زمان آن را به صورت مقابل می‌توان رسم کرد:



سطح زیر نمودار سرعت – زمان و محور زمان، برابر با جابه‌جایی است، پس در چهار ثانیهٔ دوم $(۴s < t < ۸s)$ مسافت طی شده را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$l = S_۱ + |S_۲| \Rightarrow ۱۸ = \frac{۱}{۲}(۱)(\frac{v_۰}{۵}) + \frac{۱}{۲}(۳)(\frac{۳}{۵}v_۰) \rightarrow v_۰ = ۱۸ m/s$$

و در نهایت در دو ثانیهٔ سوم $(۴s < t < ۶s)$ مسافت طی شده را مطابق با شکل زیر محاسبه می‌کنیم:

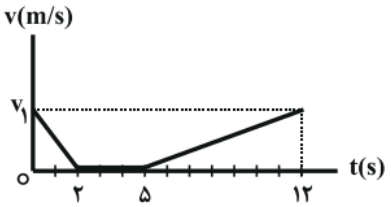


$$l' = S_۱ + |S_۲| = (۲) \times (\frac{۱}{۲}) \times (۱) \times (۳/۶) = ۳/۶ m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۲۹۱

با توجه به نمودار زیر، چون سرعت متحرک همواره نامنفی بوده، بیشترین فاصلهٔ آن از مبدأ حرکت برابر با جابه‌جایی نیز برابر با مساحت زیر منحنی سرعت – زمان است. پس:



$$d_{max} = \Delta x_{(۰ \text{تا} ۱۲s)} = \Delta x_{(۰ \text{تا} ۲s)} + \Delta x_{(۲s \text{تا} ۵s)} + \Delta x_{(۵s \text{تا} ۱۲s)} \Rightarrow ۶۳ = \left(\frac{۱}{۲} \times v_۱ \times ۲\right) + ۰ + \left(\frac{۱}{۲} \times v_۱ \times ۷\right) \Rightarrow v_۱ = \frac{۶۳}{۴/۵} = ۱۴ \frac{m}{s}$$

حال می‌توان مسافت طی شده در مرحلهٔ تندشونده (یعنی از لحظهٔ $۵s$ تا $۱۲s$) را با محاسبهٔ مساحت زیر نمودار به‌دست آورد: $d_{(۵s \text{تا} ۱۲s)} = \frac{۱}{۲} \times ۱۴ \times ۷ = ۴۹ m$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۹۲ برای تعیین این‌که آیا راننده به مانع برخورد می‌کند یا خیر، می‌توانیم مسافت مورد نیاز خودرو جهت توقف کامل را به‌دست آوریم و با فاصلهٔ اولیه خودرو تا مانع مقایسه نماییم:

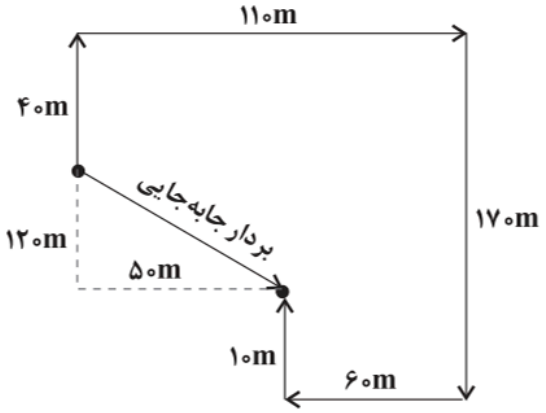
$$\left.\begin{array}{l} v_0 = ۷۲\frac{km}{h} = \frac{۷۲}{۳/۶}\frac{m}{s} = ۲۰\frac{m}{s} \\ v = ۰ \\ a = -۴\frac{m}{s^۲} \end{array}\right\} \Rightarrow v^۲ - v_0^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - ۴۰۰ = ۲\times(-۴)\Delta x \Rightarrow \Delta x = ۵۰m > ۴۲m$$

بنابراین خودرو به مانع برخورد خواهد کرد. اکنون می‌توانیم با استفادهٔ مجدد ازمعادلهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت تندی خودرو هنگام برخورد به مانع (پس از طی مسافت $۴۲m$) را به‌دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} v_0 = ۷۲\frac{km}{h} = ۲۰\frac{m}{s} \\ a = -۴\frac{m}{s^۲} \\ \Delta x = ۴۲m \end{array}\right\} \Rightarrow v'^۲ - v_0^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow v'^۲ - ۴۰۰ = ۲\times(-۴)\times ۴۲ \Rightarrow v'^۲ = ۶۴ \Rightarrow v' = ۸\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۳ با توجه به مسیرهای پیموده شده داریم:



$$\frac{\text{جابه‌جایی}}{\text{مسافت}} = \frac{\sqrt{(۵۰)^۲ + (۱۲۰)^۲}}{۴۰+۱۱۰+۱۷۰+۶۰+۱۰} = \frac{۱۳۰}{۳۹۰} = \frac{۱}{۳}$$

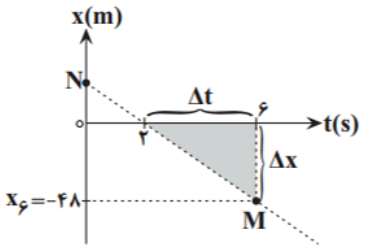
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۹۴ سرعت متوسط متحرک از ابتدای حرکت تا لحظهٔ $t = ۶s$ برابر با $-۸\frac{m}{s}$ است‌زیرا شیب خط قاطع بر نمودار در این بازه منفی است:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow -۸ = \frac{\Delta x}{۶} \Rightarrow \Delta x = -۴۸m \Rightarrow x_۶ - x_۰ = -۴۸m \xrightarrow{x_۰=۰} x_۶ = -۴۸m$$

سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۶s$ برابر با شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t = ۶s$ یعنی همان پاره‌خط MN است. برای محاسبهٔ شیب این خط از مثلث سایه خورده در شکل زیر استفاده می‌کنیم:



$$v_{t=۶s} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۴۸}{۶-۲} = -۱۲\frac{m}{s}$$

همچنین چون شیب خط مماس بر نمودار در مبدأ زمان برابر با صفر است، سرعت اولیهٔ متحرک صفر است. بنابراین شتاب متوسط متحرک در ۶ ثانیهٔ اول حرکت برابر است با:

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۱۲-۰}{۶} = -۲\frac{m}{s^۲} \Rightarrow |a| = ۲\frac{m}{s^۲}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۵ فاصلهٔ دو متحرک در هر لحظه با تابع زیر بیان می‌شود:

$$d = |x_۲ - x_۱| = |۳t^۲ - ۶t + ۱۵|$$

کم‌ترین مقدار این تابع برابر مقدار در رأس سهمی است.

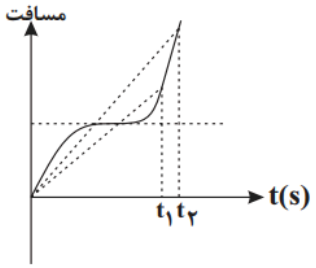
$$t_s = \frac{b}{۲a} = \frac{-(-۶)}{۲\times۳} = ۱s \Rightarrow d_{min} = |۳(۱) - ۶ + ۱۵| = ۱۲m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

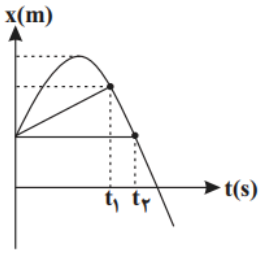
۲۹۶ اگر نمودار مسافت برحسب زمان را رسم کنیم، شیب خطی که از مبدأ به لحظهٔ t روی نمودار رسم می‌شود برابر با تندی متوسط است. از روی نمودار داریم:

$$s'_{av} > s_{av}$$



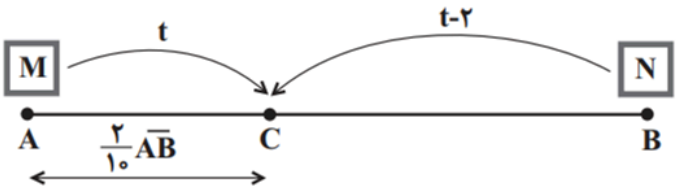
از طرفی سرعت متوسط از لحظهٔ ۰ تا t برابر با شیب خط از مبدأ زمان تا لحظهٔ t روی نمودار $x-t$ است که مطابق شکل داریم:

$$v_{av} > v'_{av}$$



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۷



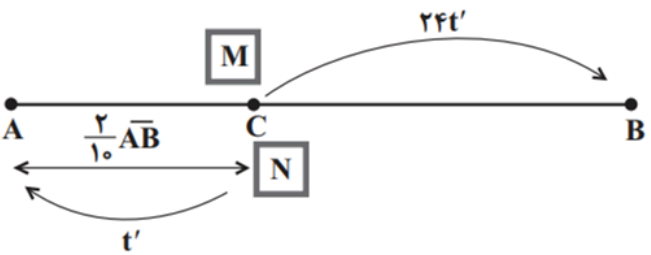
$$\frac{۲}{۱۰}\overline{AB} = v_M \times t$$

$$\frac{۸}{۱۰}\overline{AB} = v_N \times (t-۲)$$

$$\xrightarrow{(\div)} \frac{۱}{۴} = \frac{v_M}{v_N} \times \frac{t}{t-۲} \quad (۱)$$

$$\frac{۸}{۱۰}\overline{AB} = v_M \times ۲۴t'$$

$$\frac{۲}{۱۰}\overline{AB} = v_N \times t'$$



$$\xrightarrow{(\div)} ۴ = \frac{۲۴v_M}{v_N} \Rightarrow v_N = ۶v_M \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۶} \times \frac{t}{t-۲} \Rightarrow ۲t = ۳t - ۶ \Rightarrow t = ۶s$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۲۹۸ ابتدا نمودار سرعت-زمان حرکت داده شده را رسم می‌کنیم. سرعت اولیه برابر $+۲\,m/s$ است. در بازهٔ زمانی صفر تا $۳s$ سطح زیر نمودار برابر است با:

$$S=۶\Rightarrow \Delta v=-۶\,m/s$$

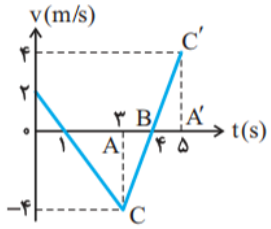
$$v_۳-v_۰=-۶\,m/s \xrightarrow{v_۰=۲\,m/s} v_۳=-۴\,m/s$$

$$S=۸\Rightarrow \Delta v=۸\,m/s$$

$$v_۵-v_۳=۸\,m/s \xrightarrow{v_۳=-۴\,m/s} v_۵=۴\,m/s$$

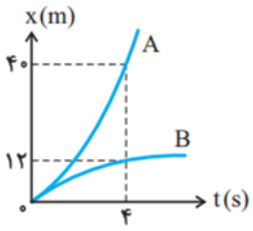
در بازهٔ زمانی $۳s$ تا $۵s$:

برای به‌دست آوردن لحظه‌ای که سرعت صفر است می‌توان با استفاده از تشابه در دو مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ و $\overset{\triangle}{A'BC'}$ لحظهٔ صفر شدن سرعت را برابر $t=۴s$ به دست آورد. همچنین از طریق شیب خط در بازهٔ $t=۰s$ تا $t=۳s$ می‌توان متوجه شد که در لحظهٔ $t=۱s$ نیز سرعت صفر می‌شود. طبق نمودار، متحرک در لحظات $t=۱s$ و $t=۴s$ تغییر جهت می‌دهد. در هر بازه‌ای که تغییر جهت نداشته باشیم جابه‌جایی و مسافت طی شده برابر هستند که فقط گزینهٔ «۳» صحیح است.



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۹ چون حرکت بر خط راست است، بنابراین $\vec{v}_B-\vec{v}_A=(v_B-v_A)\vec{i}$، از طرف دیگر دو نمودار در $t=۰$ بر هم مماس هستند، بنابراین شیب خط مماس بر هر دو در مبدأ زمان یکسان است که آن را $v_۰$ می‌گیریم، در حرکت با شتاب ثابت داریم:



$$\Delta x=\frac{v_۱+v_۲}{۲}\times t$$

حال برای متحرک A و B داریم:

$$\Delta x_A=\frac{v_۰+v_A}{۲}\times t \xrightarrow{\Delta x_A=۴۰m,t=۴s} ۴۰=\frac{v_۰+v_A}{۲}\times ۴\Rightarrow v_۰+v_A=۲۰\,m/s \quad (۱)$$

$$\Delta x_B=\frac{v_۰+v_B}{۲}\times t \xrightarrow{\Delta x_B=۱۲m,t=۴s} ۱۲=\frac{v_۰+v_B}{۲}\times ۴\Rightarrow v_۰+v_B=۶\,m/s \quad (۲)$$

در نهایت با تفاضل دو رابطهٔ (۱) و (۲) داریم:

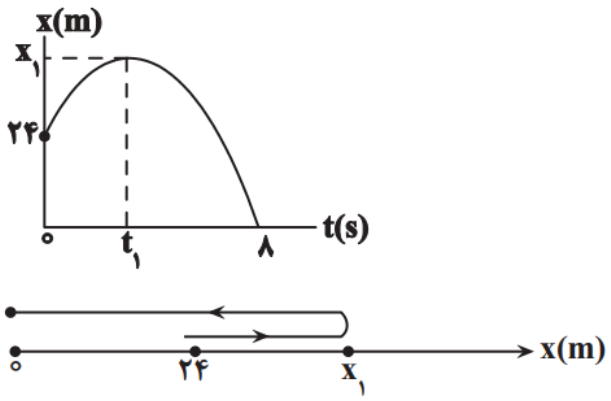
$$(۱),(۲)\Rightarrow v_B-v_A=-۱۴\,m/s\Rightarrow \vec{v}_B-\vec{v}_A=-۱۴\vec{i}\,(m/s)$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۰۰ با توجه به نمودار مکان – زمان داده شده، متحرک در لحظهٔ $t_0 = 0s$ در مکان $x_0 = 24m$ و در لحظهٔ t_1 در مکان x_1 و در لحظهٔ $t_2 = 8s$ در مکان $x = 0$ است که بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان در لحظهٔ t_1 و در مکان x_1 است.

بنابراین، ابتدا مسافت طی شده را که برابر طول مسیر حرکت است، می‌یابیم:



$$\ell = |x_1 - 24| + |0 - x_1| = x_1 - 24 + x_1 = 2x_1 - 24$$

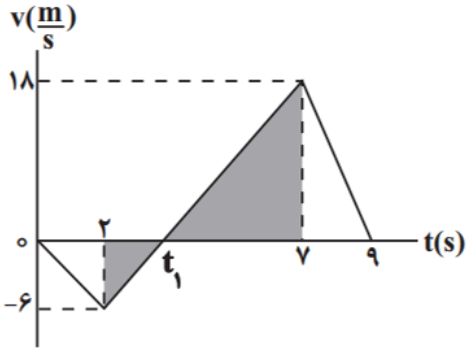
اکنون با استفاده از رابطهٔ تندی متوسط، x_1 را حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 8 - 0 = 8s]{s_{av} = 6\frac{m}{s}} 6 = \frac{2x_1 - 24}{8} \Rightarrow 48 = 2x_1 - 24$$

$$\Rightarrow 72 = 2x_1 \Rightarrow x_1 = 36m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۱ می‌دانیم در صورتی مسافت طی‌شده توسط متحرک و بزرگی جابه‌جایی آن با هم برابر است که متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت، حرکت کند. از طرف دیگر، در نمودار سرعت – زمان در تمام لحظه‌هایی که نمودار بالای محور t و یا پایین محور t باشد، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.



در این حالت با توجه به شکل، متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 که $v < 0$ است، بدون تغییر جهت در خلاف جهت محور x و در بازهٔ زمانی t_1 تا 9s که $v > 0$ است، بدون تغییر جهت در جهت محور x حرکت می کند.برای ۹ ثانیهٔ اول، بازهٔ زمانی t_1 تا 9s بزرگترین بازهٔزمانی است، لذا، ابتدا با استفاده از تشابه مثلث‌های رنگ شده، t_1 را می‌یابیم:

$$\frac{18}{6} = \frac{7 - t_1}{t_1 - 2} \Rightarrow 3 = \frac{7 - t_1}{t_1 - 2} \Rightarrow 3t_1 - 6 = 7 - t_1 \Rightarrow 4t_1 = 13 \quad \Rightarrow t_1 = \frac{13}{4}s$$

اکنون با داشتن t_1، داریم:

$$\Delta t = 9 - t_1 = 9 - \frac{13}{4} = \frac{23}{4}s$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۰۲ الف) درست است. به عنوان مثال، وقتی متحرک روی مسیر دایره‌ای یک دور کامل بزند سرعت متوسط آن صفر است، اما تندی متوسط آن برابر $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۲\pi r}{\Delta t}$ خواهد بود.

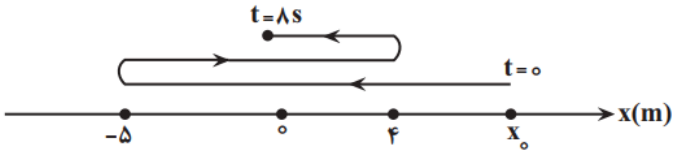
ب) درست است. به طول کلی، تندی لحظه‌ای همواره برابر بزرگی سرعت لحظه‌ای است.

پ) درست است. وقتی تندی متحرک در حال افزایش باشد، حرکت شتابدار تندشونده است. با توجه به این‌که در حرکت شتابدار تندشونده بر خط راست، جهت حرکت تغییر نمی‌کند، بنابراین، تندی متوسط با بزرگی سرعت متوسط برابر خواهد بود.

ت) نادرست است. هنگامی‌که تندی متوسط با بزرگی سرعت متوسط یکسان باشد، متحرک تغییر جهت نمی‌دهد، اما در مورد جهت بردار مکان نمی‌توان اظهارنظر نمود. به عنوان مثال، اگر متحرک از مکان $x_۰<۰$ در جهت محور x شروع به حرکت نماید و تغییر جهت ندهد، تا $x=۰$ بردار مکان در خلاف جهت محور x و برای $x>۰$، بردار مکان در جهت محور x خواهد بود.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۳ برای محاسبهٔ بزرگی سرعت متحرک در لحظهٔ $t=۸s$ باید شیب خط مماس بر نمودار در لحظهٔ $t=۸s$ را بیابیم. به همین منظور ابتدا مکان اولیهٔ متحرک $(x_۰)$ را با استفاده از تندی متوسط پیدا می‌کنیم. به همین منظور با توجه به شکل زیر، مسافت طی‌شده را به‌دست می‌آوریم:



$$\ell=|-۵-x_۰|+|۴-(-۵)|+|۰-۴|=۱۸+x_۰$$

اکنون با استفاده از تندی متوسط متحرک، $x_۰$ را می‌یابیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۸-۰=۸s]{s_{av}=۴\frac{m}{s}}۴=\frac{۱۸+x_۰}{۸}\Rightarrow ۳۲=۱۸+x_۰\quad\Rightarrow x_۰=۱۴m$$

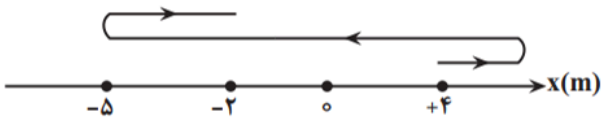
در آخر با داشتن $x_۰$، بزرگی سرعت در لحظهٔ $t=۸s$ را که برابر شیب خط مماس بر نمودار در این لحظه است، می‌یابیم دقت کنید، سرعت در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان در آن لحظه است.

$$|v_{t=۸s}|=|\text{شیب خط مماس بر نمودار}\ x-t|=|\frac{۰-۱۴}{۸-۰}|=\frac{۷}{۴}\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۰۴ با توجه به اینکه سرعت متحرک در لحظهٔ t_1 برابر $(+۴\frac{m}{s})\vec{i}$ است، در این لحظه، متحرک در جهت محور x در حال حرکت بوده است و چون در لحظهٔ t_2 مکان متحرک برابر $x=-۵m$ می‌باشد، قطعاً بعد از لحظهٔ t_1 و در مکان $x>۴m$ تغییر جهت می‌دهد. بنابراین، ساده‌ترین مسیری که متحرک می‌تواند طی کند، مطابق شکل زیر است. با توجه به این شکل، بردار سرعت متحرک دو بار و جهت بردار مکان آن، یک‌بار تغییر کرده است. در این‌صورت عبارت «الف» درست و «ب» نادرست است.



از طرف دیگر طبق رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$v_{av}=\frac{x_۳-x_۱}{t_۳-t_۱}\xrightarrow[t_۳=۹s,t_۱=۱s]{x_۳=-۲m,x_۱=۴m}v_{av}=\frac{-۲-۴}{۹-۱}=-\frac{۶}{۸}=-\frac{۳}{۴}\frac{m}{s}\Rightarrow|v_{av}|=\frac{۳}{۴}\frac{m}{s}$$

عبارت «پ» نیز نادرست است.

برای محاسبهٔ تندی متوسط، ابتدا مسافت طی‌شده را می‌یابیم. با توجه به مسیر حرکت متحرک، مسافت طی‌شده توسط آن الزاماً بزرگتر از $۱۲m$ است. زیرا، با توجه به مکان‌های داده شده، مسافت طی‌شده برابر است با:

$$\ell=|x_۲-x_۱|+|x_۳-x_۲|=|-۵-۴|+|-۲-(-۵)|=۱۲m$$

در صورتی‌که متحرک به مکان $x>۴m$ نیز رفته است و این مکان را در محاسبهٔ مسافت طی‌شده منظور نکرده‌ایم. بنابراین $\ell>۱۲m$ است. در این حالت تندی متوسط در بازهٔ زمانی t_1 تا $t_۳$ بزرگتر از $\frac{۳}{۲}\frac{m}{s}$ می‌شود.

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۹-۱=۸s]{\ell>۱۲m}s_{av}>\frac{۱۲}{۸}=\frac{۳}{۲}\frac{m}{s}$$

عبارت «ت» نیز نادرست است.

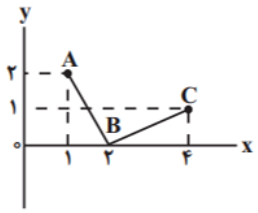
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۰۵ می‌دانیم در صورتی مسافت طی‌شده توسط متحرک و بزرگی جابه‌جایی آن با هم برابر است که متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت، حرکت نماید. بنابراین، باید مختصات داده شده در هریک از گزینه‌ها در معادلهٔ خط راست صدق کند. به همین منظور به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: مختصات نقطه‌های A، B و C روی معادلهٔ خط $y=۳x-۱$ واقعاند. با توجه به این‌که مختصات x این نقاط در حال کاهش است، متحرک بدون تغییر جهت از نقطهٔ A تا نقطهٔ C می‌تواند جابه‌جا شود.

گزینه‌های «۲» و «۴»: مختصات نقطه‌های داده شده در این گزینه‌ها به ترتیب روی معادلهٔ خط‌های $y=۲x+۱$ و $y=۴x-۴$ واقعاند. چون در این گزینه‌ها مختصات x در حال افزایش است، متحرک بدون تغییر جهت از نقطهٔ A تا C می‌تواند جابه‌جا شود.

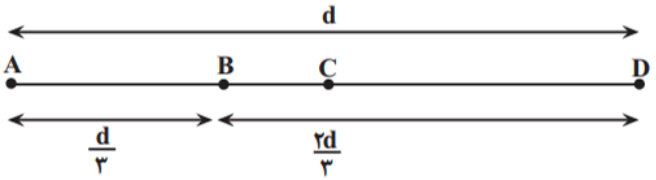
گزینهٔ «۳»: مختصات داده شده در این گزینه روی معادلهٔ خط راست قرار نمی‌گیرند؛ بنابراین، متحرک تغییر جهت می‌دهد. لذا مسافت طی‌شده و اندازهٔ جابه‌جایی با هم برابر نخواهد شد.



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۰۶ با توجه به شکل زیر و با توجه بـه رابطـهٔ $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$، ابتـدا زمـان طـی $\frac{۱}{۳}$ ابتـدایی مسیر را برحسب فاصلهٔ بین دو نقطه **(d)** می‌یابیم:



$$s_{av,AB}=\frac{\ell_{AB}}{\Delta t_{AB}} \xrightarrow[\ell_{AB}=\frac{d}{۳}]{s_{av,AB}=۲۰\frac{m}{s}} ۲۰=\frac{\frac{d}{۳}}{\Delta t_{AB}} \Rightarrow \Delta t_{AB}=\frac{d}{۶۰}s$$

برای مسیر BC که زمان حرکت آن $\frac{۱}{۴}$ از زمان باقیمانده، یعنی $\frac{۱}{۴}$ زمـان **B** تـا **D** است، داریم:

$$s_{av,BC}=\frac{\ell_{BC}}{t_{BC}} \xrightarrow[t_{BC}=\frac{۱}{۴}t_{BD}]{s_{av,BC}=v} v=\frac{\ell_{BC}}{\frac{۱}{۴}t_{BD}} \Rightarrow \ell_{BC}=\frac{۱}{۴}vt_{BD}$$

برای مسیر CD که تندی متوسط $۳v$ و زمان آن $t_{CD}=t_{BD}-\frac{۱}{۴}t_{BD}=\frac{۳}{۴}t_{BD}$ است، داریم:

$$s_{av,CD}=\frac{\ell_{CD}}{t_{CD}} \Rightarrow ۳v=\frac{\ell_{CD}}{\frac{۳}{۴}t_{BD}} \Rightarrow \ell_{CD}=\frac{۹}{۴}vt_{BD}$$

با توجه به این‌که $\ell_{BD}=\frac{۲}{۳}d$ است، می‌توان نوشت:

$$\ell_{BD}=\ell_{BC}+\ell_{CD} \Rightarrow \frac{۲}{۳}d=\frac{۱}{۴}vt_{BD}+\frac{۹}{۴}vt_{BD} \Rightarrow \frac{۲}{۳}d=\frac{۱۰}{۴}vt_{BD} \Rightarrow t_{BD}=\frac{۴d}{۱۵v}$$

در آخر برای کل مسیر حرکت می‌توان نوشت:

$$\Delta t_{کل}=t_{AB}+t_{BD}=\frac{d}{۶۰}+\frac{۴d}{۱۵v}=\frac{dv+۱۶d}{۶۰v} \qquad \Delta t_{کل}=\frac{d(v+۱۶)}{۶۰v}$$

$$s_{av\,کل}=\frac{\ell_{کل}}{\Delta t_{کل}} \xrightarrow[s_{av\,کل}=۳۰\frac{m}{s}]{\ell_{کل}=d} ۳۰=\frac{d}{\frac{d(v+۱۶)}{۶۰v}} \Rightarrow ۳۰=\frac{۶۰dv}{d(v+۱۶)} \Rightarrow ۳۰v+۴۸۰=۶۰v \Rightarrow ۴۸۰=۳۰v \Rightarrow v=۱۶\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۰۷ در بازهٔ ۰ تا $۸s$ بردار مکان در جهت محور **X** اسـت و در بـازهٔ $۸s$ تـا $۱۰s$ بـردار مکان خلاف جهت محور **X** است.

در بازهٔ ۰ تا $۱s$ و همچنین $۳s$ تا $۵s$ بردار سرعت در جهت محور **X** است.

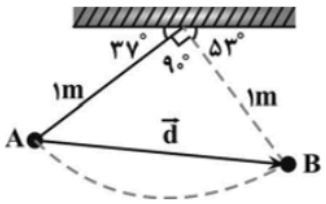
و در بازهٔ $۸s$ تا $۱۰s$ بردار سرعت در خلاف جهت محور **X** است. بنابراین در بازه‌های ۰ تا $۱s$ و $۳s$ تا $۵s$ و $۸s$ تا $۱۰s$ بردارهای مکان و سـرعت هم‌جهت‌اند.

$$\Delta t=(۱-۰)+(۵-۳)+(۱۰-۸)=۵s$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۰۸ با توجه به شکل و زوایای داده شده و همچنین با توجه به این‌که آونگ روی مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند، در جابه‌جایی از نقطهٔ **A** تا نقطهٔ **B** زاویهٔ ۹۰ درجه را طی می‌کند که در این حالت مسافت طی‌شده برابر یک چهارم محیط دایره و اندازهٔ جابه‌جایی آن برابر وتر مثلث قائم‌الزاویه است. با توجه به اینکه طول آونگ ۱ متر است، جابه‌جایی آونگ برابر است با:



$$d=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}m$$

$$\text{مسافت}=\ell=\frac{1}{4}\times(2\pi\times r)\xrightarrow[\pi=3]{r=1m}\ell=\frac{1}{4}\times2\times3\times1=1/5m$$

اکنون با داشتن اندازهٔ جابه‌جایی، با استفاده از رابطه‌های تندی متوسط و سرعت متوسط می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}v_{av}=\dfrac{d}{\Delta t}\\ s_{av}=\dfrac{\ell}{\Delta t}\end{cases}\Rightarrow\frac{v_{av}}{s_{av}}=\frac{d}{\ell}\xrightarrow{s_{av}=0/5\frac{m}{s}}\frac{v_{av}}{0/5}=\frac{\sqrt{2}}{1/5}\Rightarrow v_{av}=\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۹ در بازهٔ زمانی ۳s تا ۱۱s که شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان منفی است، سرعت منفی است و در بازهٔ زمانی ۷s تا ۱۳s که مکان‌های متحرک منفی است، بردار مکان متحرک در خلاف جهت محور **x** می‌باشد، بنابراین با محاسبهٔ اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت طی‌شده در بازه‌های زمانی فوق می‌توان نوشت:

$$\Delta x=-12-18=-30\Rightarrow|\Delta x|=30m$$

$$\ell=|-12-0|+|-9-(-12)|=12+3=15m$$

اکنون نسبت $\frac{|v_{av}|}{s_{av}}$ را می‌یابیم:

$$\frac{|v_{av}|}{s_{av}}=\frac{\frac{|\Delta x|}{\Delta t}}{\frac{\ell}{\Delta t'}}\xrightarrow[\Delta t'=13-7=6s]{\Delta t=11-3=8s}\frac{|v_{av}|}{s_{av}}=\frac{\frac{30}{8}}{\frac{15}{6}}=\frac{3}{2}=1/5$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۱۰ آ) نادرست است. متحرک دو بار در لحظه‌های $t_1 = ۳s$ و $t_2 = ۶s$ تغییر جهت داده است. در این لحظه‌ها، شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان که معرف سرعت متحرک است، صفر شده و بعد از آن لحظه‌ها علامت سرعت تغییر کرده است.

ب) نادرست است. با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط برای بازهٔ زمانی صفر تا $۳s$ داریم:

$$v_{av} = \frac{x_{۳s} - x_۰}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۳ - ۰ = ۳s]{x_{۳s} = ۲m,\ x_۰ = -۲m} v_{av} = \frac{۲ - (-۲)}{۳} = \frac{۴}{۳}\frac{m}{s}$$

و برای ۳ ثانیهٔ دوم(بازهٔ زمانی $t_1 = ۳s$ تا $t_2 = ۶s$) داریم:

$$v'_{av} = \frac{x_{۶s} - x_{۳s}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۶ - ۳ = ۳s]{x_{۶s} = -۱m,\ x_{۳s} = ۲m} v'_{av} = \frac{-۱ - ۲}{۳} = -۱\frac{m}{s}$$

در آخر داریم:

$$\frac{v_{av}}{v'_{av}} = \frac{\frac{۴}{۳}}{-۱} = -\frac{۴}{۳}$$

پ) نادرست است. به‌طور کلی، وقتی متحرک در حال حرکت باشد، هیچ‌گاه تندی متوسط صفر نمی‌شود. دقت کنید، در بازهٔ زمانی $t = ۱s$ تا $t = ۵s$، سرعت متوسط صفر است.

ت) درست است. متحرک در لحظه‌های $t_1 = ۱s$ و $t_2 = ۵s$ از مبدأ مکان عبور کرده است. دقت کنید، در لحظهٔ $t = ۷s$ متحرک به مبدأ مکان رسیده است، اما از آن عبور نمی‌کند.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

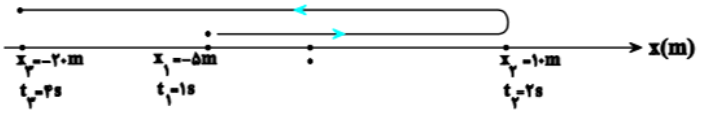
۳۱۱ آ) درست است. با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط برای بازهٔ زمانی $t_1 = ۱s$ تا $t_3 = ۴s$ به‌صورت زیر مکان x_3 را می‌یابیم:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۴ - ۱ = ۳s]{\vec{v}_{av} = (-۵\frac{m}{s})\vec{i}} (-۵\frac{m}{s})\vec{i} = \frac{\Delta \vec{x}}{۳s} \Rightarrow \Delta x = (-۱۵m)\vec{i} \Rightarrow \Delta x = -۱۵m$$

$$\Delta x = x_۳ - x_۱ \xrightarrow[\Delta x = -۱۵m]{x_۱ = -۵m} -۱۵ = x_۳ - (-۵) \Rightarrow x_۳ = -۲۰m$$

ب) نادرست است. چون مکان تغییر جهت مشخص نیست، نمی‌توان مسافت طی‌شده را به‌صورت قطعی تعیین کرد. به عنوان مثال، اگر متحرک در لحظهٔ $t = ۲s$ و در مکان $x_۲ = ۱۰m$ تغییر جهت دهد، مسافت طی‌شده برابر $۴۵m$ است و اگر در مکان‌های $x > ۱۰m$ تغییر جهت دهد، $\ell > ۴۵m$ خواهد بود. به شکل زیر توجه کنید.

$$\ell = |x_۲ - x_۱| + |x_۳ - x_۲| = |۱۰ - (-۵)| + |-۲۰ - ۱۰| = ۴۵m$$



پ) درست است. بنا به رابطهٔ $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$ داریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۴ - ۱ = ۳s]{\ell = ۴۵m} s_{av} = \frac{۴۵}{۳} = ۱۵\frac{m}{s} \qquad \xrightarrow{\ell \geq ۴۵m} s_{av} \geq ۱۵\frac{m}{s}$$

ت) نادرست است. ممکن است متحرک در مکان‌های $x > ۱۰m$ تغییر جهت داده باشد.

ث) نادرست است. در قسمت الف x_3 را تعیین کردیم.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۱۲ ابتدا اندازهٔ سرعت متوسط متحرک را پیدا می‌کنیم. دقت کنید، ثانیهٔ ششم بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 6s$ است که متحرک در این لحظه‌ها به ترتیب در مکان‌های $x_1 = 5m$ و $x_2 = 3m$ است.

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{3-5}{6-5} = -2\frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}| = 2\frac{m}{s}$$

اکنون تندی متوسط را برای کل زمان حرکت $(10s)$ می‌یابیم. متحرک در مدت $\Delta t = 10s$ مسافت $\ell = 20m$ را طی کرده است. بنابراین داریم:

$$\ell = |7-0| + |2-7| + |10-2| = 20m \qquad s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{20}{10} = 2\frac{m}{s} \qquad \frac{|v_{av}|}{s_{av}} = \frac{2}{2} = 1$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۳ چون در لحظهٔ $t = 4s$ شیب خط مماس بر نمودار مثبت می‌باشد، سرعت در این لحظه مثبت و برابر $v_{4s} = 4\frac{m}{s}$ است. از طرف دیگر، چون شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان در لحظهٔ $t_1 = 6s$، صفر می‌باشد، سرعت در این لحظه صفر خواهد بود. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$a_{av} = \frac{v_{6s} - v_{4s}}{t_2 - t_1} \xrightarrow[t_1=4s, t_2=6s]{v_{6s}=0, v_{4s}=4\frac{m}{s}} a_{av} = \frac{0-4}{6-4} = -2\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۴ می‌دانیم، شتاب در هر لحظهٔ دلخواه t، برابر شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان در آن لحظه است. بنابراین، چون در لحظه‌های t_1، t_2 و t_3 شیب خط مماس بر نمودار سرعت – زمان برابر صفر است، در این لحظه‌ها شتاب متحرک صفر می‌شود. یعنی ۳ بار شتاب متحرک صفر شده است. چون نمودار سرعت – زمان بالای محور t قرار دارد، در تمام لحظه‌ها سرعت مثبت است و متحرک در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. بنابراین متحرک تغییر جهت نمی‌دهد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۵ با توجه به نمودار مکان – زمان، هر دو متحرک دارای سرعت ثابت می‌باشند، پس ابتدا سرعت آن‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \begin{cases} v_A = \frac{0-10}{5-0} = -2\frac{m}{s} \\ v_B = \frac{0-(-8)}{2-0} = 4\frac{m}{s} \end{cases}$$

اکنون معادلهٔ مکان – زمان این دو متحرک را می‌یابیم:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow{x_{0A}=10m} x_A = -2t + 10 \qquad x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{x_{0B}=-8m} x_B = 4t - 8$$

در آخر لحظه‌ای را که فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر برابر با ۴۲ متر می‌شود، می‌یابیم:

$$x_B - x_A = 42 \Rightarrow (4t-8) - (-2t+10) = 42 \Rightarrow 4t - 8 + 2t - 10 = 42 \Rightarrow 6t = 60 \Rightarrow t = 10s$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۱۶ ابتدا تندی متحرک‌های A و B را می‌یابیم:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow[x_A=0]{t=2s} 0 = v_A \times 2 + x_{0A} \Rightarrow x_{0A} = -2v_A \qquad x_B = v_B t + X_{0B} \xrightarrow[x_B=0]{t=8s} 0 = v_B \times 8 + x_{0B} \Rightarrow x_{0B} = -8v_B$$

از طرف دیگر، با توجه به داده‌های روی نمودار $x_{0B} - x_{0A} = 4m$ است. بنابراین داریم:

$$x_{0B} - x_{0A} = 4 \Rightarrow -8v_B - (-2v_A) = 4 \xrightarrow{v_B = \frac{1}{5}v_A} -8 \times \frac{1}{5}v_A + 2v_A = 4$$

$$\Rightarrow -1/6v_A + 2v_A = 4 \Rightarrow 0/4v_A = 4 \Rightarrow v_A = 10\frac{m}{s}, v_B = \frac{1}{5}v_A = \frac{1}{5} \times 10 = 2\frac{m}{s}$$

اکنون لحظهٔ به‌هم رسیدن دو متحرک به یکدیگر را پیدا می‌کنیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow v_A t + x_{0A} = v_B t + x_{0B} \Rightarrow 10t + x_{0A} = 2t + x_{0B} \qquad 8t = x_{0B} - x_{0A} \xrightarrow{x_{0B} - x_{0A} = 4m} 8t = 4 \Rightarrow t = 0/5s$$

در این قسمت مکانی را که دو متحرک به‌هم می‌رسند، می‌یابیم:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow[t=0/5s]{x_{0A} = -2v_A} x_A = v_A \times 0/5 - 2v_A = -1/5v_A \xrightarrow{v_A = 10\frac{m}{s}} x_A = -1/5 \times 10 = -15m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۱۷ ابتدا تندی متحرک‌های A و B را که برابر شیب نمودار مکان – زمان است، می‌یابیم و در ادامه معادلهٔ مکان – زمان متحرک‌ها را می‌نویسیم:

$$v_A = \frac{\Delta x_A}{\Delta t} = \frac{0-(-300)}{10-0} = 30\frac{m}{s} \qquad v_B = \frac{\Delta x_B}{\Delta t} = \frac{600-300}{20-0} = 15\frac{m}{s}$$

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow{x_{0A} = -300m} x_A = 30t - 300$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{x_{0B} = 300m} x_B = 15t + 300$$

اکنون لحظه‌ای که دو متحرک به‌هم می‌رسند را پیدا می‌کنیم و سپس مکان آن لحظه را می‌یابیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow 30t - 300 = 15t + 300 \Rightarrow 15t = 600 \Rightarrow t = 40s \qquad x_A = 30t - 300 = 30 \times 40 - 300 = 900m$$

در این قسمت معادلهٔ مکان – زمان متحرک C را می‌نویسیم:

$$x_C = v_C t + x_{0C} \xrightarrow[x_{0C} = 900m]{v_C = 40\frac{m}{s}} x_C = 40t + 900$$

وقتی مکان متحرک C دو برابر شود یعنی به مکان $x = 900 \times 2 = 1800$ می‌رسد لحظهٔ رسیدن به این مکان برابر است با:

$$x_C = 40t + 900 \Rightarrow 1800 = 40t + 900 \Rightarrow 900 = 40t \Rightarrow t = 22/5s$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۱۸ اگر تندی متحرک در قسمت اول را $v_1 = y$ فرض کنیم، تندی آن در قسمت دوم حرکت که دو برابر تندی آن در قسمت اول حرکت است، برابر $v_2 = 2y$ خواهد بود. بنابراین، با توجه به داده‌های روی نمودار می‌توان نوشت:

$$x = v_1 t + x_0 \xrightarrow[v_1=-x, x_0=x_1]{t=4s \Rightarrow x=0} 0 = -x \times 4 + x_1 \Rightarrow x_1 = 4x \qquad \xrightarrow[v_1=-x, x_0=x_1=4x]{t=9s \Rightarrow x=x_2} x_2 = -x \times 9 + 4x \Rightarrow x_2 = -5x$$

از طرف دیگر داریم:

$$v_2 = -2v_1 \Rightarrow \frac{x_3 - x_2}{10-9} = 2 \times \frac{x_2 - x_1}{9} \Rightarrow x_3 - (-5x) = 2 \times \frac{-5x - 4x}{9} \Rightarrow x_3 + 5x = 2x \Rightarrow x_3 = -3x$$

در این قسمت مسافت طی‌شده و جابه‌جایی را در مدت $10s$ می‌یابیم:

$$\Delta x = x_3 - x_1 = -3x - 4x = -7x \Rightarrow |\Delta x| = 7x \qquad = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| = |-5x - 4x| + |-3x - (-5x)| \Rightarrow \ell = 9x + 2x = 11x$$

با توجه به این‌که مسافت طی‌شده $48m$ بیشتر از اندازهٔ جابه‌جایی است، داریم:

$$\ell = |\Delta x| + 48 \Rightarrow 11x = 7x + 48 \Rightarrow 4x = 48 \Rightarrow x = 12m$$

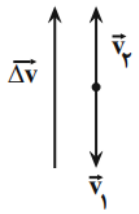
با توجه به نمودار داده شده، بیشترین فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ شروع حرکت در لحظهٔ $t = 9s$ است. بنابراین داریم:

$$x_2 - x_1 = -5x - 4x \Rightarrow x_2 - x_1 = -9x = -9 \times 12 = -108m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۱۹ در لحظهٔ برخورد توپ با زمین جهت سرعت به سمت پایین و بلافاصله پس از برخورد جهت سرعت به سمت بالا است. بنابراین اولاً جهت بردار تغییرات سرعت به سمت بالا و ثانیاً اندازهٔ آن برابر مجموع تندی گلوله قبل و بعد از برخورد با زمین است. با استفاده از رابطهٔ شتاب متوسط داریم:



(v_1 و v_2 به ترتیب تندی گلوله قبل و بعد از برخورد با زمین است.)

$$|a_{av}|=\left|\frac{\Delta v}{\Delta t}\right| \xrightarrow[\Delta t=80ms=0/08s]{(a_{av})=500\frac{m}{s^2},|\Delta v|=v_1+v_2} v_1+v_2=0/08\times 500=40\frac{m}{s}$$

اگر ارتفاع اولیهٔ گلوله h و ارتفاع آن پس از برخورد با زمین h' باشد با توجه به قانون پایستگی انرژی داریم:

$$\begin{cases}\frac{1}{2}mv_1^2=mgh\\ \frac{1}{2}mv_2^2=mgh'\end{cases}\Rightarrow v_1^2-v_2^2=2g(h-h') \xrightarrow{h-h'=20m} v_1^2-v_2^2=400$$

جابه‌جای توپ برابر با اختلاف ارتفاع h و h' است.

$$\xrightarrow[v_1^2-v_2^2=(v_1+v_2)(v_1-v_2)]{v_1+v_2=40\frac{m}{s}} v_1-v_2=10 \xrightarrow{v_1+v_2=40\frac{m}{s}} \begin{cases}v_1=25\frac{m}{s}\\ v_2=15\frac{m}{s}\end{cases}$$

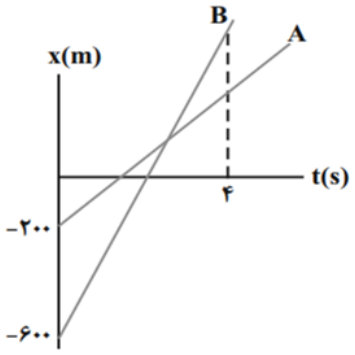
اکنون h و h' را به‌دست می‌آوریم؛ مسافت طی‌شده از لحظهٔ رها شدن تا لحظهٔ رسیدن به ارتفاع اوج پس از برخورد برابر با $h+h'$ است.

$$d=h+h'=\frac{v_1^2}{2g}+\frac{v_2^2}{2g} \xrightarrow[v_2=15\frac{m}{s}]{v_1=25\frac{m}{s},g=10\frac{N}{kg}} d=\frac{25^2+15^2}{20} \Rightarrow d=42/5m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۲۰ مطابق شکل زیر در لحظه‌ای که فاصلهٔ متحرک برای دومین بار ۲۰۰ متر می‌شود، متحرک **B**، ۲۰۰ جلوتر از متحرک **A** قرار دارد ($x_B > x_A$) با نوشتن معادلهٔ مکان – زمان دو متحرک داریم:



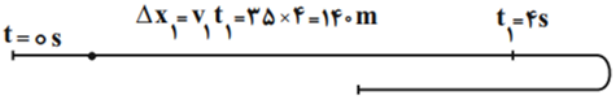
$$\begin{cases} x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow{x_{0A}=-200\,m} x_A = v_A t - 200 \\ x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow{x_{0B}=-600\,m} x_B = v_B t - 600 \end{cases} \qquad \xrightarrow[t=4s]{x_B - x_A = 200\,m} 200 = (v_B - v_A)\times 4 - 400 \quad \Rightarrow v_B - v_A = 150\,\frac{m}{s}$$

فاصلهٔ دو متحرک در لحظهٔ $t = 12s$ برابر است با:

$$x'_B - x'_A = (v_B - v_A)t' - 400 = 150\times 12 - 400 = 1400\,m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۲۱ در هر بازهٔ زمانی جابه جایی متحرک را تا لحظهٔ $t_2 = 10s$ به دست می‌آوریم:



$$t_2 = 10s, \Delta x_2 = v_{av}(t_2 - t_1) = -\frac{20}{3}\times(10-4) = -40\,m$$

اکنون مکان متحرک را در لحظهٔ $t_2 = 10s$ به‌دست می‌آوریم:

$$x_2 = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 140 - 40 = 100\,m$$

پس از لحظهٔ $t_2 = 10s$ حرکت متحرک یکنواخت شده و سرعت را به‌دست می‌آوریم:

$$v_2 = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[x_3=10\,m]{x_2=100\,m,\ \Delta t=16-10=6s} v_2 = \frac{10-100}{6} = \frac{-90}{6} = -15\,\frac{m}{s}$$

اکنون شتاب متوسط را در ۱۲ ثانیهٔ اول حرکت به‌دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=12s]{\Delta v = v_2 - v_1 = -15-35 = -50\,\frac{m}{s}} a_{av} = \frac{-50}{12} = \frac{-25}{6} \Rightarrow |a_{av}| = \frac{25}{6}\,\frac{m}{s^2}$$

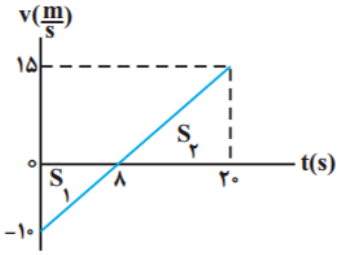
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۲۲ چون در ۵ ثانیهٔ اول حرکت، تندی متوسط خودرو بزرگ‌تر از اندازهٔ سرعت متوسط آن است، الزاماً خودرو در ۵ ثانیهٔ اول حرکت، تغییر جهت داده است.
بنابراین، در لحظهٔ $t = 6s$ حرکت خودرو الزاماً تندشونده است، اما برای زمان‌های قبل از آن، اظهارنظر قطعی نمی‌توان کرد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۲۳ چون متحرک در خلاف جهت محور x در حال حرکت می‌باشد، $v_0 = -10\frac{m}{s}$ است. از طرف دیگر، چون شتاب در جهت محور x است، $a = \frac{5}{4}\frac{m}{s^2}$ می‌باشد، بنابراین، چون $a > 0$ و $v < 0$ است، ابتدا حرکت کندشونده می‌باشد. به همین منظور، لحظهٔ تغییر جهت متحرک و سرعت آن در لحظهٔ $t = 20s$ را می‌یابیم و به دنبال آن نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم و با استفاده از مساحت بین نمودار $v-t$ و محور t، مسافت طی‌شده را حساب می‌کنیم:



$$v = at + v_0 \Rightarrow v = \frac{5}{4}t - 10 \begin{cases} v = 0 \Rightarrow 0 = \frac{5}{4}t_1 - 10 \Rightarrow t_1 = 8s \\ t = 20s \Rightarrow v = \frac{5}{4}\times 20 - 10 = 15\frac{m}{s} \end{cases}$$

$$\ell = S_1 + S_2 = \left|\frac{-10\times 8}{2}\right| + \frac{15\times(20-8)}{2} \Rightarrow \ell = 40 + 90 = 130m$$

در آخر تندی متوسط برابر است با:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\ell = 130m]{\Delta t = 20-0 = 20s} s_{av} = \frac{130}{20} = 6/5\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۴ برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده نمودار $v-t$ را رسم می‌کنیم و با استفاده از مساحت بین نمودار و محور t مسافت طی شده را محاسبه می‌کنیم. به همین منظور ابتدا v_0 و a را می‌یابیم:

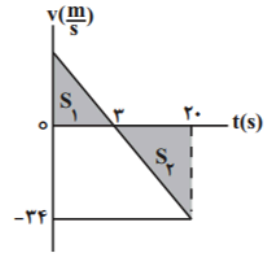
$$(t = 3s \text{ تا } t = 0s) \Rightarrow \Delta x = \frac{(v + v_0)}{2}\Delta t \Rightarrow 46 - 37 = \frac{0 + v_0}{2}(3 - 0) \Rightarrow v_0 = 6\frac{m}{s}$$

برای محاسبهٔ a، چون در لحظهٔ $t = 3s$، شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ برابر صفر است، در این لحظه $v = 0$ می‌باشد، بنابراین داریم:

$$a = \frac{v_{3s} - v_0}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = 3-0 = 3s]{v_0 = 6\frac{m}{s}} a = \frac{0-6}{3-0} = -2\frac{m}{s^2}$$

اکنون نمودار $(v-t)$ را رسم می‌کنیم و با استفاده از آن، مسافت طی‌شده را پیدا می‌کنیم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow[v_0 = 6\frac{m}{s}]{a = -2\frac{m}{s}} v = -2t + 6 \qquad t = 20s \Rightarrow v_{20s} = -2\times 20 + 6 = -34\frac{m}{s}$$

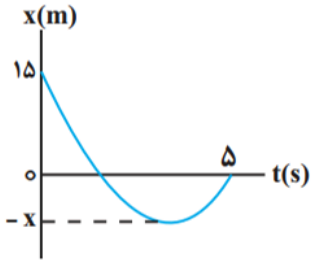


$$\ell = S_1 + S_2 = \frac{6\times 3}{2} + \left|\frac{-34\times(20-3)}{2}\right| \Rightarrow \ell = 9 + 289 = 298m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۲۵ ابتدا با استفاده از داده‌های روی نمودار و رابطهٔ تندی متوسط، x را می‌یابیم. به همین منظور برای بازهٔ زمانی صفر تا $5s$، مسافت طی‌شده را برحسب x می‌نویسیم و سپس از رابطهٔ تندی متوسط استفاده می‌کنیم:

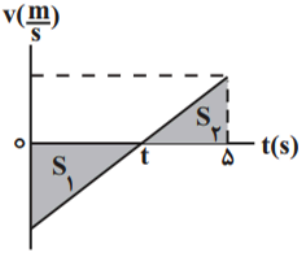


اکنون t را می‌یابیم. چون متحرک در لحظهٔ t تغییر جهت می‌دهد، برای پیدا کردن t، ابتدا نمودار سرعت – زمان متحرک را رسم می‌کنیم. چون شیب خط مماس بر نمودار مکان – زمان متحرک در لحظهٔ $t=0s$، منفی می‌باشد، سرعت اولیهٔ آن منفی و با توجه به تقعر نمودار، شتاب آن مثبت است. از طرف دیگر، چون مساحت سطح بین نمودار $v-t$ و محور t برابر با اندازهٔ جابه‌جایی است، با استفاده از تشابه مثلث‌های S_1 و S_2 به‌صورت زیر t را پیدا می‌کنیم:



$$\ell = |-x-۱۵| + |۰-(-x)| = x+۱۵+x = ۲x+۱۵$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = ۵-۰ = ۵s]{s_{av} = ۷/۸ \frac{m}{s}} ۷/۸ = \frac{۲x+۱۵}{۵} \Rightarrow ۳۹ = ۲x+۱۵ \Rightarrow x = ۱۲m$$



$$S_۱ = |\Delta x_۱| = |-۱۲-۱۵| = ۲۷m$$

$$S_۲ = \Delta x_۲ = ۰-(-۱۲) = ۱۲m$$

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \left(\frac{t}{۵-t}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۲۷}{۱۲} = \left(\frac{t}{۵-t}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۹}{۴} = \left(\frac{t}{۵-t}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۲} = \frac{t}{۵-t} \Rightarrow t = ۳s$$

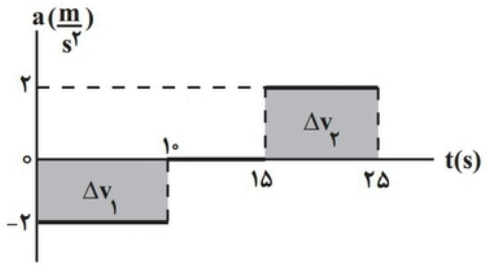
در آخر، اندازهٔ سرعت متوسط متحرک را در بازهٔ زمانی صفر تا $t=۳s$ می‌یابیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۱۲-۱۵}{۳-۰} = \frac{-۲۷}{۳} = -۹\frac{m}{s} \Rightarrow |v_{av}| = ۹\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۲۶ برای بررسی سوال باید نمودار سرعت – زمان آن را رسم کنیم. به همین منظور، ابتدا مساحت سطح بین نمودار $a-t$ و محور t را که معرف Δv است، در بازه‌های زمانی مختلف به‌دست می‌آوریم و سپس سرعت در لحظه‌های $10s$، $15s$ و $25s$ را می‌یابیم:



$$\Delta v_1 = -2\times 10 = -20\frac{m}{s}$$

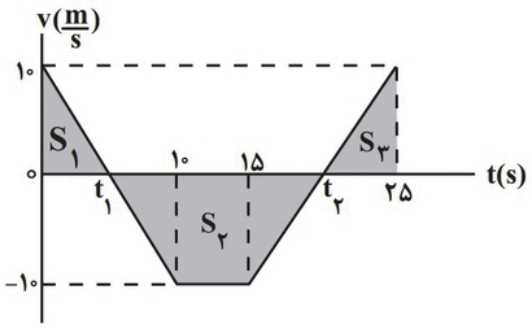
$$\Delta v_2 = 2\times(25-15) = 20\frac{m}{s}$$

$$v_{10s} = v_0 + \Delta v_1 \xrightarrow{v_0=10\frac{m}{s}} v_{10s} = 10-20 = -10\frac{m}{s}$$

$$a_{15s\,تا\,10s} = 0 \Rightarrow v_{15s} = v_{10s} \Rightarrow v_{15s} = -10\frac{m}{s}$$

$$v_{25s} = v_{15s} + \Delta v_2 = -10+20 = 10\frac{m}{s}$$

اکنون نمودار را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم و با استفاده از تشابه مثلث‌ها، t_1 و t_2 را می‌یابیم:



$$\frac{10}{t_1} = \frac{10}{10-t_1} \Rightarrow t_1 = 10-t_1 \Rightarrow 2t_1 = 10 \Rightarrow t_1 = 5s$$

$$\frac{10}{25-t_2} = \frac{10}{t_2-15} \Rightarrow t_2-15 = 25-t_2 \Rightarrow 2t_2 = 40 \Rightarrow t_2 = 20s$$

در آخر به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ «۱»: نادرست است. متحرک در بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_2 = 20s$ به مدت $\Delta t = 20-5 = 15s$ که سرعت آن منفی است، در خلاف جهت محور x حرکت می‌کند.

گزینهٔ «۲»: نادرست است. در بازهٔ زمانی $t_1 = 5s$ تا $t_3 = 10s$، سرعت و شتاب هر دو منفی و در بازهٔ زمانی $t_2 = 20s$ تا $t_4 = 25s$، سرعت و شتاب هر دو مثبت‌اند. بنابراین، سرعت و شتاب در مجموع $\Delta t = (10-5)+(25-20) = 10s$ هم‌جهت‌اند.

گزینهٔ «۳»: درست است. با استفاده از مساحت سطح بین نمودار $v-t$ و محور t داریم:

$$\ell = S_1+S_2+S_3 = \frac{10\times 5}{2} + \left|\frac{(20-5)+(15-10)}{2}\times 10\right| + \frac{10\times(25-20)}{2} \Rightarrow \ell = 25+100+25 = 150m \qquad S_{av} = \frac{150}{25-0} = \frac{150}{25} = 6\frac{m}{s}$$

گزینهٔ «۴»: نادرست است. با استفاده از مساحت سطح بین نمودار $v-t$ و محور t داریم:

$$\Delta x = S_1 - S_2 + S_3 = 25-100+25 = -50m \Rightarrow |\Delta x| = 50m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۲۷ ابتدا مدت زمان عبور هر متحرک از مبدأ مکان $(x=0)$ را می‌یابیم:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \xrightarrow[x_A=0,\ x_{0A}=160m]{v_A<0} 0 = -s_A t_A + 160 \Rightarrow s_A t_A = 160 \xrightarrow{s_A=2s_B} 2s_B t_A = 160 \Rightarrow t_A = \frac{80}{s_B}$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \xrightarrow[x_B=0,\ v_B>0]{x_{0B}=-140m} 0 = s_B t_B - 140 \Rightarrow s_B t_B = 140 \Rightarrow t_B = \frac{140}{s_B}$$

اکنون با استفاده از اختلاف زمان عبور دو متحرک از مبدأ مکان، v_A و v_B را می‌یابیم:

$$t_B - t_A = 12 \Rightarrow \frac{140}{s_B} - \frac{80}{s_B} = 12 \Rightarrow \frac{60}{s_B} = 12 \Rightarrow s_B = 5\frac{m}{s} \xrightarrow{v_B>0} v_B = 5\frac{m}{s}$$

$$s_A = 2s_B = 2\times 5 = 10\frac{m}{s} \xrightarrow{v_A<0} v_A = -10\frac{m}{s}$$

دو بار فاصلهٔ دو متحرک کمتر از $60m$ می‌شود، یک‌بار زمانی که به هم نزدیک می‌شوند و بار دیگر، هنگامی‌که از کنار هم عبور کردند. بنابراین می‌توان نوشت:

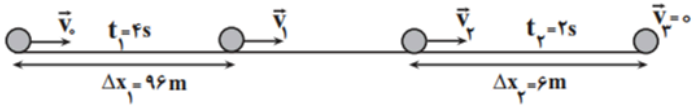
$$x_A = -10t_1 + 160,\ x_B = 5t_1 - 140$$
$$x_A - x_B < 60 \Rightarrow -10t_1 + 160 - (5t_1 - 140) < 60$$
$$\Rightarrow -15t_1 + 300 < 60 \Rightarrow -15t_1 < -240 \Rightarrow t_1 > 16s$$
$$x_A - x_B > -60 \Rightarrow -10t_2 + 160 - (5t_2 - 140) > -60$$
$$\Rightarrow -15t_2 + 300 > -60 \Rightarrow -15t_2 > -360 \Rightarrow t_2 < 24s$$

بنابراین، در بازهٔ زمانی $t_1 = 16s$ تا $t_2 = 24s$ به مدت $\Delta t = 24 - 16 = 8s$، فاصلهٔ دو متحرک کمتر از $60m$ می‌شود. البته از روش زیر نیز می‌توان t را به‌دست آورد:

$$\text{فاصلهٔ داده شده} \times 2 = v_{\text{نسبی}} \times t \Rightarrow 60\times 2 = |v_A - v_B| t \quad \Rightarrow 120 = (100 - (-5))\times t \Rightarrow t = 8s$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۲۸ ابتدا شتاب حرکت متحرک را با استفاده از جابه‌جایی متحرک در ۲ ثانیهٔ قبل از توقف (۲ ثانیهٔ آخر حرکت) به‌دست می‌آوریم. چون متحرک در آخر متوقف می‌شود، فرض می‌کنیم متحرک از حال سکون حرکت نموده و در مدت $2s$ به اندازهٔ $6m$ جابه‌جا شده است.



$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}at_2^2 + v_3 t \xrightarrow[t=2s]{v_3=0,\ \Delta x_2=6m}$$

$$6 = \frac{1}{2}a\times 4 + 0 \Rightarrow a = 3\frac{m}{s^2} \xrightarrow{\text{حرکت کندشونده است.}} a = -3\frac{m}{s^2}$$

اکنون با داشتن a، معادلهٔ مکان – زمان را برای ۴ ثانیهٔ اول حرکت می‌نویسیم و v_0 را می‌یابیم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0 t_1 \xrightarrow[\Delta x_1=96m]{t_1=4s,\ a=-3\frac{m}{s^2}} 96 = \frac{1}{2}\times(-3)\times 16 + v_0\times 4$$

$$120 = 4v_0 \Rightarrow v_0 = 30\frac{m}{s} \xrightarrow{1\frac{m}{s}=3/6\frac{km}{h}} v_0 = 30\times 3/6 = 108\frac{km}{h}$$

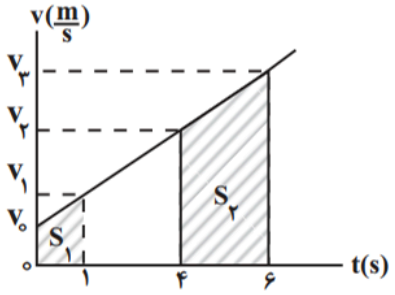
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۲۹ چون حرکت متحرک بر مسیر مستقیم تندشونده است، $\vec{v}_0$ و $\vec{a}$ هم‌جهت‌اند و متحرک تغییر جهت نمی‌دهد. بنابراین، ابتدا سرعت متحرک را در لحظه‌های $t_1 = 1s$، $t_2 = 4s$ و $t_3 = 6s$ به‌دست می‌آوریم و نمودار سرعت – زمان آن را رسم می‌کنیم. دقت کنید، ۲ ثانیهٔ سوم، همان بازهٔ زمانی $4s$ تا $6s$ است.

$$v = at + v_0 \xrightarrow{a=4\frac{m}{s^2}} v = 4t + v_0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1s \Rightarrow v_1 = 4\times 1 + v_0 = 4 + v_0 \\ t_2 = 4s \Rightarrow v_2 = 4\times 4 + v_0 = 16 + v_0 \\ t_3 = 6s \Rightarrow v_3 = 4\times 6 + v_0 = 24 + v_0 \end{cases}$$

چون $a > 0$ است، شیب نمودار $v-t$ مثبت است و نمودار به‌صورت زیر رسم می‌شود. از طرف دیگر، مساحت سطح بین نمودار $v-t$ و محور t، برابر جابه‌جایی است. بنابراین داریم:



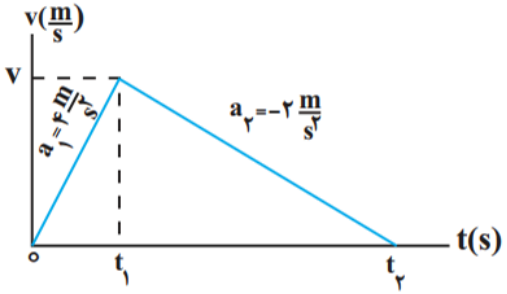
$$\ell_2 = 6\ell_1 \xrightarrow[\ell_1 = S_1]{\ell_2 = S_2} \frac{v_2 + v_3}{2}\times(6-4) = 6\times\frac{v_1 + v_0}{2}\times 1$$

$$v_2 + v_3 = 3v_1 + 3v_0 \Rightarrow 16 + v_0 + 24 + v_0 = 3(4 + v_0) + 3v_0$$

$$\Rightarrow 40 + 2v_0 = 12 + 3v_0 + 3v_0 \Rightarrow 28 = 4v_0 \Rightarrow v_0 = 7\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۰ نمودار سرعت – زمان متحرک را رسم می‌کنیم و با استفاده از سطح بین نمودار $v-t$ و محور t که معرف جابه‌جایی متحرک است و رابطهٔ $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$، به‌صورت زیر v را می‌یابیم:



$$a_1 = \frac{v - 0}{t_1} \Rightarrow 4 = \frac{v}{t_1} \Rightarrow v = 4t_1$$

$$a_2 = \frac{0 - v}{t_2 - t_1} \xrightarrow{v = 4t_1} -2 = \frac{-4t_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow 2t_2 - 2t_1 = 4t_1$$

$$\Rightarrow 2t_2 = 6t_1 \Rightarrow t_2 = 3t_1$$

از طرف دیگر، مساحت سطح بین نمودار $v-t$ و محور t برابر $13/5m$ است، در این حالت داریم:

$$S = \frac{v\times t_2}{2} \xrightarrow[S=13/5m]{t_2=3t_1,\, v=4t_1} 13/5 = \frac{4t_1\times 3t_1}{2} \Rightarrow 27 = 12t_1^2 \Rightarrow t_1^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow t_1 = 1/5s \qquad v = 4t_1 = 4\times 1/5 = 6\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۳۱ با توجه به این‌که در لحظهٔ $t=۴s$ شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ برابر صفراست، در این لحظه سرعت متحرک صفر می‌باشد. بنابراین، با استفاده از معادلهٔ سرعت – زمان می‌توان نوشت:

$$v=at+v_۰ \xrightarrow[v=۰]{t=۴s} ۰=a\times ۴+v_۰ \Rightarrow v_۰=-۴a$$

از طرف دیگر، با استفاده از معادلهٔ مکان – زمان داریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \xrightarrow[x_۰=۸m,v_۰=-۴a]{t=۱۰s\Rightarrow x=۰} ۰=\frac{۱}{۲}a\times ۱۰۰-۴a\times ۱۰+۸$$

$$\Rightarrow -۱۰a=۸ \Rightarrow a=-۰/۸\frac{m}{s^۲}, v_۰=-۴a=-۴\times(-۰/۸) \Rightarrow v_۰=۳/۲\frac{m}{s}$$

اکنون مکان متحرک در لحظهٔ $t=۴s$ را پیدا می‌کنیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow x_{۴s}=\frac{۱}{۲}\times(-۰/۸)\times ۱۶+۳/۲\times ۴+۸ =۱۴/۴m$$

در این قسمت مسافت طی‌شده در مدت $۱۰s$ را می‌یابیم:

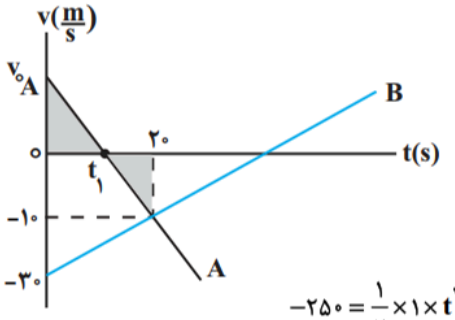
$$\ell=|x_{۴s}-x_۰|+|x_{۱۰s}-x_{۴s}|=|۱۴/۴-۸|+|۰-۱۴/۴|=۲۰/۸m$$

در آخر تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\ell=۲۰/۸m]{\Delta t=۱۰-۰=۱۰s} s_{av}=\frac{۲۰/۸}{۱۰}=۲/۰۸\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۳۲ ابتدا لحظه‌ای را که اندازهٔ جابه‌جایی متحرک B برابر $|\Delta x_B|=۲۵۰m$ می‌شود، به‌دست می‌آوریم. در واقع باید لحظهٔ $t_۱$ را که جهت حرکت متحرک A تغییر می‌کند بیابیم؛ تا این لحظه جابه‌جایی متحرک B منفی است.



$$a_B=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-۱۰-(-۳۰)}{۲۰-۰}=\frac{۲۰}{۲۰}=۱\frac{m}{s^۲}$$

$$\Delta x_B=\frac{۱}{۲}a_Bt^۲+v_{۰B}t \xrightarrow[v_{۰B}=-۳۰\frac{m}{s}]{\Delta x_B=-۲۵۰m}$$

$$-۲۵۰=\frac{۱}{۲}\times ۱\times t^۲-۳۰t \Rightarrow t^۲-۶۰t+۵۰۰=۰ \Rightarrow (t-۱۰)(t-۵۰)=۰ \Rightarrow t=۱۰s, t_۲=۵۰s$$

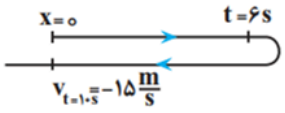
چون $t_۱<۲۰s$ است، $t_۱=۱۰s$ قابل قبول می‌باشد. اکنون از تشابه مثلث‌های رنگ شده $v_{۰A}$ را می‌یابیم:

$$\frac{v_{۰A}}{t_۱}=\frac{۱۰}{۲۰-t_۱} \xrightarrow{t_۱=۱۰s} \frac{v_{۰A}}{۱۰}=\frac{۱۰}{۲۰-۱۰} \Rightarrow v_{۰A}=۱۰\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۳ اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در بازهٔ زمانی ۰ تا ۶s برابر با بازهٔ زمانی ۶s تا ۱۰s است.با نوشتن رابطهٔ سرعت متوسط در این دو بازهٔ زمانی داریم:



$$|\Delta x_{0-6s}|=|\Delta x_{6s-10s}| \xrightarrow{\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\left|\frac{v_1+v_2}{2}\right|} \frac{v_1}{2}\times 6=\frac{15-v_1}{2}\times 4$$

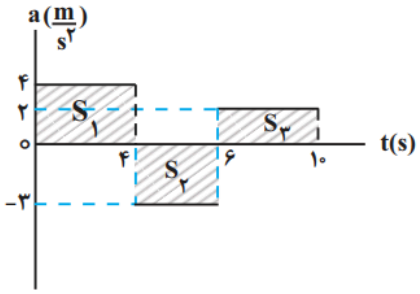
$$\Rightarrow 3v_1=30-2v_1 \Rightarrow 5v_1=30 \Rightarrow v_1=6\frac{m}{s}$$

اکنون مسافت طی‌شده توسط متحرک را در ۶ ثانیهٔ اول به‌دست می‌آوریم:

$$|\Delta x_{0-6s}|=\frac{v_1}{2}\times 6 \xrightarrow{v_1=6\frac{m}{s}} (\Delta x_{0-6s})=18m$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۴ مسافت طی‌شده در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت برابر با مجموع مسافت طی‌شده توسط متحرک در هر بازهٔ زمانی است. در نمودار شتاب – زمان مساحت محصور بین نمودار شتاب – زمان و محور زمان برابر با تغییرات سرعت است. بنابراین در هر کدام از بازه‌های زمانی، سرعت را ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی مشخص می‌کنیم:



$$S_1=4\times 4=16\frac{m}{s} \Rightarrow v_{4s}=-20+16=-4\frac{m}{s}$$

$$S_2=-3\times 2=-6\frac{m}{s} \Rightarrow v_{6s}=-4-6=-10\frac{m}{s}$$

$$S_3=2\times 4=8\frac{m}{s} \Rightarrow v_{10s}=-10+8=-2\frac{m}{s}$$

با توجه به اینکه در تمام بازه‌های زمانی جهت سرعت تغییر نکرده است، بنابراین مسافت طی‌شده با مجموع بزرگی جابه‌جایی در تمام بازه‌های زمانی برابر است. با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta t_1}=\frac{v_0+v_{4s}}{2} \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{4}=\frac{-20-4}{2} \Rightarrow \Delta x_1=-48m$$

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta t_2}=\frac{v_{4s}+v_{6s}}{2} \Rightarrow \frac{\Delta x_2}{2}=\frac{-4-10}{2} \Rightarrow \Delta x_2=-14m$$

$$\frac{\Delta x_3}{\Delta t_3}=\frac{v_{6s}+v_{10s}}{2} \Rightarrow \frac{\Delta x_3}{4}=\frac{-10-2}{2} \Rightarrow \Delta x_3=-24m$$

بنابراین مسافت طی‌شده در این ۱۰ ثانیه برابر است با

$$\ell_{0-10s}=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|+|\Delta x_3| \Rightarrow \ell_{0-10s}=48+14+24=86$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۳۵ در لحظهٔ $t=3s$ مکان متحرک **A** و سرعت آن را به‌دست می‌آوریم:

$$v=at+v_0 \xrightarrow[a_A=2\frac{m}{s^2}]{t=3s,\,v_0=0} v=6\frac{m}{s}$$

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t \xrightarrow[a_A=2\frac{m}{s^2}]{v_0=0,\,t=3s} \Delta x=\frac{1}{2}\times 2\times 3^2=9m \Rightarrow x_A=9m$$

اکنون معادلهٔ حرکت دو متحرک را پس از لحظهٔ $t=3s$ می‌نویسیم:

$$x_A=\frac{1}{2}a_At^2+v_{0A}t+x_{0A} \xrightarrow[a_A=2\frac{m}{s^2}]{x_{0A}=9m,\,v_{0A}=6\frac{m}{s}} x_A=t^2+6t+9$$

$$x_B=\frac{1}{2}a_Bt^2+v_{0B}t+x_{0B} \xrightarrow[a_B=2/5\frac{m}{s^2}]{x_{0B}=0,\,v_{0B}=0} x_B=\frac{5}{4}t^2$$

در لحظه‌ای که فاصلهٔ دو متحرک ۲۹ متر می‌شود، داریم:

$$x_A-x_B=29m \Rightarrow t^2+6t+9-\frac{5}{4}t^2=29 \Rightarrow \frac{-t^2}{4}+6t+9=29 \Rightarrow t^2-24t-36=29\times(-4) \Rightarrow t^2-24t+80=0$$

$$\Rightarrow (t-4)(t-20)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=4s & \text{اولین بار} \\ t=20s & \text{دومین بار} \end{cases}$$

اکنون سرعت متحرک **B** را در لحظهٔ $20s$ (۲۳ ثانیه پس از شروع حرکت متحرک **A**) به‌دست می‌آوریم:

$$v_B=a_Bt \xrightarrow[t=20s]{a_B=2/5\frac{m}{s^2}} v_B=50\frac{m}{s}$$

$$v_A=a_At+v_{0A} \xrightarrow[t=20s,\,v_{0A}=6\frac{m}{s}]{a_A=2\frac{m}{s^2}} v_A=46\frac{m}{s}$$

بنابراین اختلاف تندی دو متحرک برابر است با:

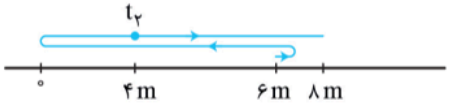
$$v_B-v_A=50-46=4\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۳۶ اگر بردار سرعت و مکان هم‌جهت باشند متحرک در حال دور شدن از مبدأ مکان است.

ساده‌ترین مسیر حرکتی که می‌توان برای متحرک ترسیم کرد مطابق شکل زیر است:



الف جهت حرکت حداقل ۲ با تغییر می‌کند. (نادرست)

ب مطابق مسیر حرکت متحرک حداقل سه بار در شش ثانیهٔ اول حرکت از مکان +۶m عبور می‌کند. (درست)

پ با توجه به بزرگی جابجایی و مسافت طی شده، اختلاف آنها ۱۳ متر است. (درست)

$$\ell = S_{av} \times \Delta t = ۳ \times (۶-۱) = ۱۵\,m \ , (\Delta x) = ۸-۶ = ۲m$$

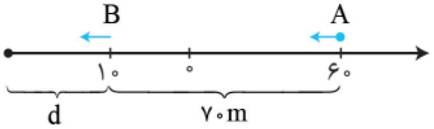
ت برای آنکه متحرک بتواند از مبدأ مکان عبور کند بایستی مسافت طی شدهٔ آنها حتماً بزرگتر از ۱۴ متر باشد. با توجه به اینکه در این سؤال مسافت طی شده ۱۵ متر است، بنابراین متحرک می‌تواند از مبدأ مکان عبور کند. (نادرست)

(ماروال ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۷ شیب نمودار مکان - زمان در حرکت یکنواخت برابر سرعت است. نسبت تندی دو متحرک را به دست می‌آوریم.

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{\frac{|۴۰-۶۰|}{t'}}{\frac{|-۲۵-(-۱۰)|}{۳t'}} \Rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{۶۰}{۱۵} = ۴$$

دو منحرک در جهت منفی محور x ها در حال حرکت هستند. در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند مکان دو متحرک را به دست می‌آوریم:



$$\begin{matrix} \ell_B = d \\ \ell_A = ۷۰ + d \end{matrix} \xrightarrow[\ell_A = V_A t_A \ , t_A = t_B]{\ell_B = V_B t_B \ , \ V_A = ۴V_B} \ell_A = ۴\ell_B \Rightarrow ۷۰ + d = ۴d \Rightarrow d = \frac{۷۰}{۳}m \Rightarrow x_A = x_B = -۱۰ - \frac{۷۰}{۳} = \frac{-۱۰۰}{۳}m$$

(ماروال ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳۸ در حرکت با شتاب سرعت متوسط در یک بازهٔ زمانی برابر با میانگین سرعت ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی است.

بازهٔ زمانی ۳ ثانیه دوم حرکت از لحظه $t_1 = ۳s$ تا $t_2 = ۶s$ است.

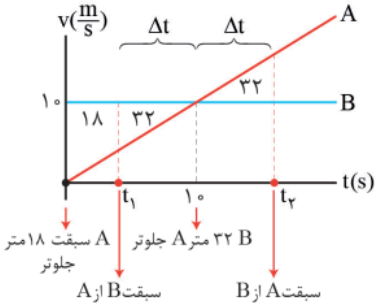
$$V_{av} = \frac{V_1 + V_2}{۲} \xrightarrow[V_2 = V_0 + ۶a]{V_1 = V_0 + ۳a} V_{av} = \frac{۲V_0 + ۹a}{۲}$$

گزینه‌ای جواب است که مجموع ابتدا و انتهای بازهٔ زمانی برابر ۹ ثانیه باشد. (گزینهٔ ۳)

(ماروال ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۳۹ معادلهٔ کل مکان برحسب زمان دو متحرک را به دست می‌آوریم:



$$x_{\circ A}=۱۸m\ ,\ V_{\circ A}=\circ\ ,\ a_A=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{۱\circ}{۱\circ}=۱\frac{m}{s^۲}\Rightarrow x_{A(t)}=\frac{۱}{۲}a_At^۲+V_{\circ A}t+x_{\circ A}=\frac{۱}{۲}t^۲+۱۸$$

$$x_{\circ B}=\circ\ ,\ V_B=۱\circ\frac{m}{s}\Rightarrow x_{B(t)}=V_{Bt}+x_{\circ B}=۱\circ t$$

در لحظاتی که یک متحرک از دیگری سبقت می‌گیرد، مکان آنها برابر است. بنابراین برای یافتن این لحظات، باید معادله $x_{B(t)}=x_{A(t)}$ را حل کنیم:

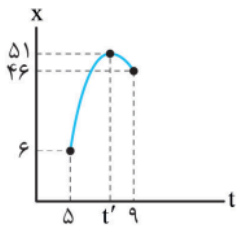
$$x_{B(t)}=x_{A(t)}\Rightarrow\frac{۱}{۲}t^۲.۱۸=۱\circ t\Rightarrow t^۲-۲\circ t-۳۶\begin{cases}t_۱=۲s\\t_۲=۱۸s\end{cases}$$

اختلاف زمانی بین دو سبقت برابر است با:

$$\Delta t=t_۲-t_۱=۱۸-۲=۱۶s$$

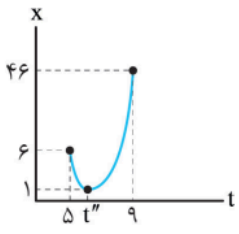
(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۰ متحرک با تندی $۱\circ\frac{m}{s}$ از مکان $+۶m$ عبور کرده است. اگر فرض کنیم متحرک در جهت مثبت از این مکان عبور کرده است بنابراین مطابق رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت شتاب ثابت داریم:



$$\frac{V_۱+V_۲}{۲}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۹-۵=۴s]{V_۱=۱\circ\frac{m}{s},\Delta x=۴۶-۶=۴\circ m}\frac{۱\circ+V_۲}{۲}=\frac{۴\circ}{۴}\Rightarrow V_۲=۱\circ\frac{m}{s}$$

در حالت با شتاب ثابت، سرعت متحرک در توقف یکسان باشد بنابراین متحرک در لحظهٔ $t=۵s$ در جهت منفی حرکت می‌کند، پس با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان در حالت شتاب ثابت، شتاب را به دست می‌آوریم:



$$\Delta x=\frac{۱}{۲}at^۲+V_{۵s}t\xrightarrow[V_{۵s}=-۱\circ\frac{m}{s},t=۹-۵=۴s]{\Delta x=۴۶-۶=۴\circ m}$$

$$۴\circ-\frac{۱}{۲}\times a\times ۴^۲-۱\circ\times ۴\Rightarrow a=۱\circ\frac{m}{s^۲}\xrightarrow[V=at+V_\circ]{V_{۵s}=-۱\circ\frac{m}{s}}$$

$$-۱\circ=۵\times ۱\circ+V_\circ\rightarrow V_\circ=-۶\circ\frac{m}{s}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۴۱ مبدأ زمان را در لحظه‌ای که متحرک B از مبدأ مکان عبور می‌کند در نظر می‌گیریم و معادلهٔ حرکت هر دو متحرک را می‌نویسیم. به همین منظور لازم است، سرعت متحرک A و مکان آن را بعد از دو ثانیه بیابیم که این دو سرعت اولیه و مکان اولیهٔ متحرک A محسوب می‌شوند.

$$x_A = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \xrightarrow[a=۴\frac{m}{s^۲},\ t=۲s]{x_۰=۰,\ v_۰=۰}$$

$$x_A = \frac{۱}{۲}\times ۴\times ۲^۲ + ۰ + ۰ \Rightarrow x_A = ۸m$$

$$v_A = a_At + v_{۰A} = ۴\times ۲ + ۰ \Rightarrow v_A = ۸\frac{m}{s}$$

در لحظه‌ای که متحرک B شروع به حرکت می‌کند، برای متحرک A $v_{۰A} = ۸\frac{m}{s}$ و $x_{۰B} = ۸m$ است. بنابراین معادلهٔ حرکت آن برابر است با:

$$x_A = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x_A = \frac{۱}{۲}\times ۴t^۲ + ۸t + ۸ \Rightarrow x_A = ۲t^۲ + ۸t + ۸$$

اکنون معادلهٔ حرکت متحرک B را می‌نویسیم. چون سرعت متحرک B ثابت است، داریم:

$$x_B = v_Bt + x_{۰B} \xrightarrow{x_۰=۰} x_B = v_Bt$$

چون در لحظه‌ای که متحرک A به متحرک B می‌رسد، مکان آن‌ها یکسان است، معادلات آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم و v_B را می‌یابیم:

$$x_A = x_B \Rightarrow ۲t^۲ + ۸t + ۸ = v_Bt \Rightarrow ۲t^۲ + ۸t - v_Bt + ۸ = ۰ \Rightarrow ۲t^۲ + (۸ - v_B)t + ۸ = ۰$$

چون حداکثر تندی متحرک B خواسته شده است، این معادله باید یک جواب داشته باشد. بنابراین باید $\Delta = ۰$ باشد.

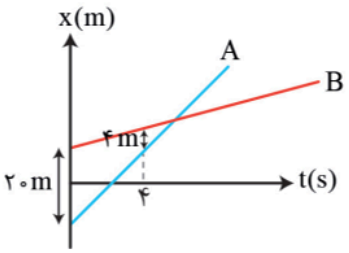
$$\Delta = ۰ \Rightarrow (۸ - v_B)^۲ - ۴\times ۲\times ۸ = ۰ \Rightarrow (۸ - v_B)^۲ = ۶۴$$

$$\Rightarrow ۸ - v_B = \pm ۸ \Rightarrow (-) \Rightarrow v_B = ۱۶\frac{m}{s}, (+) \Rightarrow v_B = ۰ \text{ غ . ق . ق}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۴۲ با توجه به معادله مکان - زمان در حرکت یکنواخت، مکان متحرک‌های A و B در $t = ۴s$ برابر است با:



$$x_{A(t=۴s)} = x_{۰A} + ۴V_A$$
$$x_{B(t=۴s)} - x_{A(t=۴s)} = (x_{۰B} - x_{۰A}) + ۴(V_B - V_A)$$

با توجه به نمودار، در مبدأ زمان متحرک B، ۲۰ m جلوتر است. بنابراین:

$$x_{۰B} = x_{۰A} = ۲۰m$$

همچنین در لحظه $t = ۴s$، متحرک B، ۴ m جلوتر است. بنابراین:

$$x_{B(t=۴s)} - x_{A(t=۴s)} = ۴m$$

$$۴ = ۲۰ + ۴(V_B - V_A) \Rightarrow V_A - V_B = ۴\frac{m}{s}$$

در لحظه $t_۱$ دو متحرک به هم می‌رسند:

$$x_{A(t_۱)} = x_{B(t_۱)} \Rightarrow x_{۰A} + t_۱V_A = x_{۰B} + t_۱V_B \Rightarrow t_۱(V_A - V_B) = x_{۰B} - x_{۰A} \Rightarrow ۴t_۱ ۲۰ \Rightarrow t_۱ = ۵s$$

فاصله دو متحرک یک بار قبل از $t_۱$ به فاصله ۲ متری هم می‌رسند و یکبار بعد از $t_۱$. وقتی متحرک برای دومین بار (بعد از $t_۱$) به هم می‌رسند، متحرک A جلوتر است. بنابراین:

$$x_A(t_۲) - x_B(t_۲) = ۲m \Rightarrow (x_{۰A} + t_۲V_A) - (x_{۰B} + t_۲V_B) = ۲$$
$$x_{۰A} - x_{۰B} + t_۲(V_A - V_B) = ۲ \Rightarrow ۲۰ + t_۲(۴) = ۲ \Rightarrow t_۲ = ۵۵/s$$

$$\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۵}{۵/۵} = \frac{۱۰}{۱۱}$$

راه دوم: با استفاده از رابطه حرکت نسبی داریم:

$$x = V_{\text{نسبی}}t + x_{۰\text{نسبی}} \xrightarrow{x_۰ = -۲۰m}$$

$$x_{\text{نسبی}} = V_{\text{نسبی}}t - ۲۰ \Rightarrow V_{\text{نسبی}} = \frac{۱۶}{۴} = ۴\frac{m}{s}$$

برای دومین بار که فاصله دو متحرک ۲m، می‌شود، $x_{\text{نسبی}} = ۲m$ است.

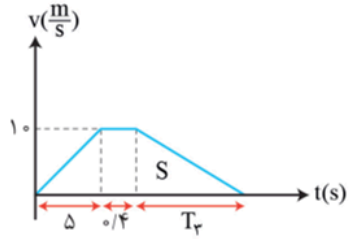
در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند $x_{\text{نسبی}} = ۰$

$$\left.\begin{array}{l} ۲ = V_{\text{نسبی}} \times t_۲ - ۲۰ \\ ۰ = V_{\text{نسبی}} \times t_۱ - ۲۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{t_۱}{t_۲} = \frac{۲۰}{۲۲} = \frac{۱۰}{۱۱}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۳ چون حداقل شتاب ترمز خواسته شده اتومبیل بایستی دقیقاً در جلوی مانع متوقف شود پس جابجایی کلی اتومبیل۴۹ متر خواهد بود.

نمودار $V - t$ اتومبیل به شکل روبرو ترسیم می‌شود.



$$\left.\begin{array}{l} \Delta x_{\text{قسمت تندشونده}} = \frac{۱}{۲}aT_۱^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۵^۲ = ۲۵m \\ \Delta x_{\text{قسمت یکنواخت}} = V.T_۲ = ۱۰ \times ۰/۴ = ۴m \\ \Delta x_{\text{کل}} = ۴۹m \end{array}\right\} \rightarrow \Delta x_{\text{کندشونده}} = ۴۹ - ۲۹ = ۲۰m \rightarrow ۲۰ = \frac{۱۰ \times T_۳}{۲} \rightarrow T_۳ = ۴s$$

$$|a_{\text{ترمز}}| = \left|\frac{\Delta V}{T_۳}\right| = \left|\frac{۰ - ۱۰}{۴}\right| = ۲/۵\frac{m}{s^۲}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۴۴ حرکت متحرک ۳ مرحله دارد که هرکدام شتاب ثابت است. سرعت اولیه در هر مرحله، برابر با سرعت نهایی مرحله قبل است. سرعت اولیه مرحله اول را V_0 در نظر می‌گیریم. جابجایی هر سه مرحله را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2}a_1(\Delta t_1)^2 + V_0\Delta t_1 \xrightarrow[\Delta t_1 = 4-0 = 4s]{a_1 = 4\frac{m}{s^2}} \Delta x_1 = 32 + 4V_0$$

$$V_{(t=4s)} = V_0 + a_1\Delta t_1 = V_0 + 16$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a_2(\Delta t_2)^2 + V_{(t=4s)}\Delta t_2 \xrightarrow[\Delta t_2 = 14-4 = 10s]{a_2 = 2\frac{m}{s^2}} \Delta x_2 = 100 + 160 + 10V_0$$

$$V_{(t=14s)} = V_{(t=4s)} + \Delta t_2 a_2 = 36 + V_0$$

$$\Delta x_3 = \frac{1}{2}a_3(\Delta t_3)^2 + \Delta t_3 V_{(t=14s)} \xrightarrow[\Delta t_3 = 20-14 = 6s]{a_3 = -3\frac{m}{s^2}} \Delta x_3 = -54 + 216 + 6V_0$$

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 754m$$

$$(32 + 4V_0) + (260 + 10V_0) + (162 + 6V_0) = 454 + 20V_0 = 754m \Rightarrow V_0 = 15\frac{m}{s} = 54\frac{km}{h}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۵ در ابتدا شتاب متحرک $-4\frac{m}{s^2}$ است. متحرک با این شتاب متوقف شده تغییر جهت می‌دهد و در مکان ۴۲m جهت و بزرگی شتاب آن تغییر می‌کند. اکنون سرعت متحرک را در مکان ۴cm به دست می‌آوریم:

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \xrightarrow[V_0 = 20\frac{m}{s}, a = -4\frac{m}{s^2}]{\Delta x = 42m} V^2 - 20^2 = 2(-4)(42)$$

$$V^2 = 400 - 336 = 64 \Rightarrow \begin{cases} V = +8\frac{m}{s} \\ V = -8\frac{m}{s} \end{cases}$$

دقت کنید در لحظه‌ای که جهت و بزرگی شتاب تغییر می‌کند، سرعت متحرک $-8\frac{m}{s}$ است.

اکنون مدت زمانی که طول می‌کشد تا سرعت متحرک از $20\frac{m}{s}$ به $-8\frac{m}{s}$ برسد را به دست می‌آوریم.

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta V = -8-20 = -28\frac{m}{s}]{a = -4\frac{m}{s^2}} \Delta t = \frac{-28}{-4} = 7s$$

در لحظهٔ $t = 7s$ شتاب عوض می‌شود و ادامهٔ حرکت با شتاب $2\frac{m}{s^2}$ است.

بنابراین سرعت متحرک در لحظهٔ $t = 8s$ برابر است با:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \xrightarrow[V_{7s} = -8\frac{m}{s},\ \Delta t = 8-7 = 1s]{\Delta V = V_{8s} - V_{7s},\ a = 2\frac{m}{s^2}} 2 = \frac{V_{8s} + 8}{1} \Rightarrow V_{8s} = -6\frac{m}{s}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۴۶ با توجه به شکل، متحرک‌های A و B، در مبدأ زمان در دو جهت مخالف از مبدأ مکان عبور می‌کنند و تا لحظهٔ t'، از یکدیگر دور می‌شوند. پس از لحظهٔ t'، تا لحظه t'' که دو متحرک به‌هم می‌رسند، در حال نزدیک شدن به یکدیگرند. بنابراین، ابتدا لحظه‌های t' و t'' را می‌یابیم. به همین منظور با محاسبهٔ شتاب متحرک‌ها، معادلات سرعت - زمان و مکان - زمان آن‌ها را می‌نویسیم و با مساوی قرار دادن معادلاتِ سرعتشان، t' و با مساوی قرار دادن معادلاتِ مکانشان، t'' را به‌دست می‌آوریم. دقت کنید، در لحظهٔ t' سرعت متحرک‌ها یکسان و در لحظهٔ t''، مکان آنها یکسان است.

$$a_A=\frac{\Delta v_A}{\Delta t_A}=\frac{0-20}{5-0}\Rightarrow a_A=-4\frac{m}{s^2}$$

$$a_B=\frac{\Delta v_B}{\Delta t_B}=\frac{0-(-20)}{20-0}\Rightarrow a_B=1\frac{m}{s^2}$$

$$v=at+v_0\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{v_{0A}=20\frac{m}{s}} v_A=-4t+20\\ \xrightarrow{v_{0B}=-20\frac{m}{s}} v_B=t-20\end{cases}$$

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\Rightarrow\begin{cases}\xrightarrow{x_{0A}=0} x_A=\frac{1}{2}(-4)t^2+20t+0\\ \Rightarrow x_A=-2t^2+20t\\ \xrightarrow{x_{0B}=0} x_B=\frac{1}{2}\times1\times t^2-20t+0\\ \Rightarrow x_B=\frac{1}{2}t^2-20t\end{cases}$$

$$t=t'\Rightarrow v_A=v_B\Rightarrow -4t'+20=t'-20\Rightarrow 40=5t'\Rightarrow t'=8s$$

$$t=t''\Rightarrow x_A=x_B\Rightarrow -2t''^2+20t''=\frac{1}{2}t''^2-20t''$$

$$\Rightarrow\frac{5}{2}t''^2-40t''=0\Rightarrow t''(\frac{5}{2}t''-40)=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{5}{2}t''-40=0\Rightarrow t''=16s\\ t''=0\end{cases}$$

با داشتن t' و t''، اکنون می‌توان مسافت طی شده در بازهٔ زمانی t' و t'' که دو متحرک به یکدیگر نزدیک می‌شوند را به‌دست آورد. بنابراین، با توجه به این‌که، در نمودار سرعت - زمان، مساحت سطح محصور بین نمودار و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است، به‌صورت زیر، مسافت طی شده را می‌یابیم. البته قبل از آن لازم است، سرعت هریک از متحرک‌ها را در لحظه‌های t' و t'' به‌دست آوریم. در ضمن در لحظهٔ t'، سرعت دو متحرک یکسان است.

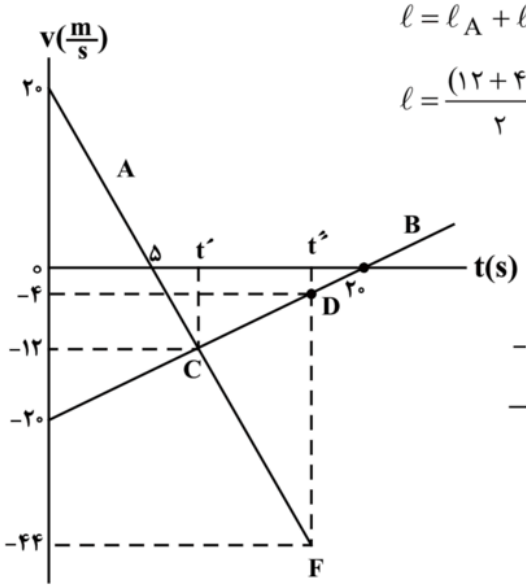
$$v_A=v_B=-4t'+20\xrightarrow{t'=8s} v_A=v_B=-4\times8+20\Rightarrow v_A=v_B=-12\frac{m}{s}$$

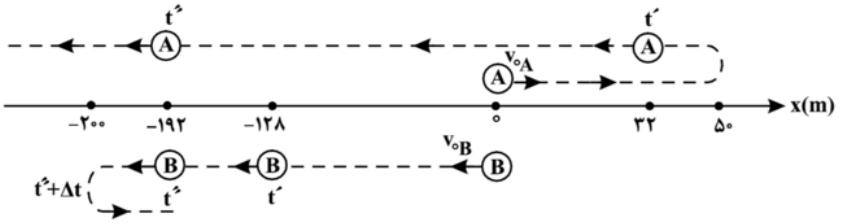
$$v_A=-4t''+20\xrightarrow{t''=16s} v_A=-4\times16+20=-44\frac{m}{s}$$

$$v_B=t''-20\xrightarrow{t''=16s} v_B=16-20=-4\frac{m}{s}$$

$$\ell=\ell_A+\ell_B\Rightarrow \ell=\text{مساحت ذوزنقه } t't''CF+\text{مساحت ذوزنقه } t't''CD$$

$$\ell=\frac{(12+44)}{2}\times(16-8)+\frac{(12+4)}{2}\times(16-8)\Rightarrow\ell=(56\times4)+(8\times8)\Rightarrow\ell=288m$$





همان‌طور که در شکل فوق مشاهده می‌کنید، هر دو متحرک A و B، در بازهٔ زمانی t' تا t'' در جهت مخالف محور x به یکدیگر نزدیک می‌شوند. در لحظهٔ $t''+\Delta t$ سرعت متحرک B صفر می‌شود و جهت آن برعکس می‌گردد، اما، متحرک A به حرکت خود در جهت مخالف محور x ادامه می‌دهد.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۴۷ ابتدا مکان جسم در لحظهٔ معین را به‌دست می‌آوریم:

$$v_{av(۶s\ تا\ ۰)} = \frac{x_۶ - x_۰}{۶} = -۲ \xrightarrow{x_۶=۰} x_۰ = ۱۲m$$

اکنون شیب خط مماس را به‌دست می‌آوریم:

$$شیب = \frac{-۱۲}{۱۰} = -۱/۲$$

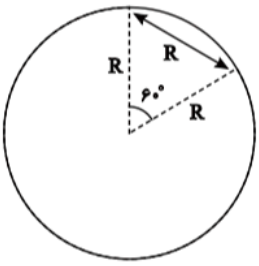
شیب خط مماس، با سرعت لحظه‌ای در لحظهٔ $t = ۴s$ برابر است:

$$v_۴ = -۱/۲ \frac{m}{s}$$

$$a_{av(۸s\ تا\ ۴s)} = \frac{v_۸ - v_۴}{۴} = \frac{۰-(-۱/۲)}{۴} = +۰/۳ \frac{m}{s^۲}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۸ متحرک در مدت T کمانی به اندازهٔ ۳۶۰ درجه را طی می‌کند. بنابراین در مدت $\frac{T}{۶}$ کمان به اندازهٔ ۶۰ درجه را طی می‌کند.



$$\frac{T}{۶}\ در\ بازهٔ\ \Delta x_{\frac{T}{۶}} = \Delta x$$

$$V_{av} = V = \frac{\Delta x}{\frac{T}{۶}} = \frac{R}{\frac{T}{۶}} \Rightarrow \frac{R}{T} = \frac{V}{۶} \quad (۱)$$

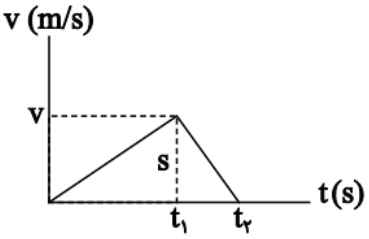
در سمت T، محیط دایره طی می شود، بنابراین در $\frac{T}{۶}$، یک‌چهارم محیط طی می‌شود.

$$\frac{T}{۴}\ در\ مدت\ S_{av} = \frac{\frac{۱}{۴} \times محیط}{\frac{T}{۴}} = \frac{محیط}{T} = \frac{۲\pi R}{T} \xrightarrow{(۱)} ۲\pi \times \frac{V}{۶} = \pi \frac{V}{۳}$$

نکته: تندی متحرک ثابت است و در هر بازه‌ای به همین پاسخ می‌رسیدیم.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴۹ برای اینکه زمان پیمودن حداقل شود، قطار ابتدا باید با حداکثر شتاب تندشونده‌اش حرکت کند، سپس در لحظه‌ای ترمز کند که دقیقاً تا رسیدن به ایستگاه متوقف شود. نمودار سرعت ـ زمان این حرکت مطابق شکل زیر خواهد شد که در آن از لحظهٔ شروع تا $t_۱$، شتاب $۰/۶ m/s^۲$ و از $t_۱$ تا $t_۲$، شتاب $-۱/۲ m/s^۲$ است.



$$\left.\begin{array}{l} a_۱ = ۰/۶ = \frac{V - ۰}{t_۱} \\ a_۲ = -۱/۲ = \frac{V - ۰}{t_۲} \end{array}\right\} \Rightarrow t_۱ = \frac{۲}{۳} t_۲$$

$$\Delta x = S = ۲۸۸۰ = \frac{۱}{۲} t_۲ V = (\frac{۱}{۲} t_۲)(۰/۴ t_۲) \Rightarrow ۲۸۸۰ = \frac{۱}{۵} t_۲^۲ \Rightarrow t_۲ = ۱۲۰s$$

$$V = t_۱ a_۱ = (\frac{۲}{۳} t_۲)(۰/۶) = ۰/۴ t_۲$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۵۰ در بازهٔ $t=۹s$ تا $t=۱۸s$ با توجه به رابطهٔ جابه‌جایی ـ سرعت متوسط داریم:

$$\Delta x=\frac{v_۹+v_{۱۸}}{۲}\times\Delta t \xrightarrow[v_m=-۲۸m/s]{\Delta x=-۹۰m\ ,\ \Delta t=۱۸-۹=۹s}$$

$$-۹۰=\frac{v_۹-۲۸}{۲}\times۹\Rightarrow v_۹=۲۸-۲۰=۸m/s$$

$$\Rightarrow a=\frac{v_{۱۸}-v_۹}{۱۸-۹}=\frac{-۲۸-۸}{۹}=-۴m/s^۲$$

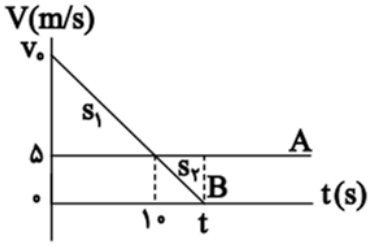
$$v=a\times t+v_۰\Rightarrow v_۹=a\times۹+v_۰\Rightarrow ۸=-۴\times۹+v_۰\Rightarrow v_۰=۴۴m/s$$

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\times-۴t+۴۴t+x\Rightarrow \xrightarrow{t=۹s} x_۹=۱۲۰=-۲\times۹^۲+۴۴\times۹+x_۰$$

$$\Rightarrow x_۰=۱۲۰+۱۶۲-۳۹۶=-۱۱۴m$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۵۱ در ابتدا متحرک A، ۲۰ متر جلوتر از متحرک B است و در لحظه ای که سرعت آنها با یکدیگر برابر می شود. متحرک A ۳۰ متر عقب تر از متحرک B است.پس از مبدا زمان تا لحظه ای که سرعت دو متحرک با هم برابر می شود جابجایی متحرک B ۵۰ متر بیشتر از جابجایی متحرک A است. بنابراین با توجه به اینکه مساحت محصور بین نمودار سرعت-زمان و محور زمان برابر با جابجایی است داریم :



$$s_۱=۲۰+۳۰=\frac{v_۰-۵}{۲}\times۱۰\Rightarrow v_۰=۱۵m/s$$

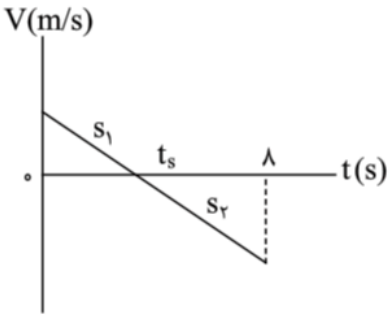
$$\Rightarrow a_B=\frac{۵-۱۵}{۱۰}=-۱\frac{m}{s^۲}\Rightarrow v_B=-۱\times t+۱۵=۰\Rightarrow t=۱۵s$$

$$\Rightarrow\frac{s_۲}{s_۱}=(\frac{۵}{۱۰})^۲\Rightarrow s_۲=\frac{s_۱}{۴}=\frac{۵۰}{۴}=۱۲/۵m\Rightarrow \text{فاصله A و B}=۳۰-۱۲/۵=۱۷/۵\,m$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۵۲ نمودار سرعت - زمان متحرک مطابق شکل مقابل است:



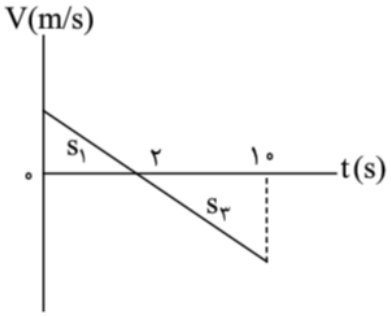
اندازه‌ی جابه‌جایی متحرک از لحظهٔ شروع تا لحظهٔ تغییر جهت (t_s) برابر است با:

$$S_1 = |۸۱ - ۷۲| = ۹m$$

و از لحظهٔ تغییر جهت تا $t = ۸s$ برابر است با:

$$S_2 = |۰ - ۸۱| = ۸۱m$$

دو مثلث S_1 و S_2 متشابه‌اند و نسبت مساحت‌ها، مجذور نسبت تشابه است:



$$(\frac{۸ - t_s}{t_s})^2 = \frac{S_2}{S_1} = \frac{۸۱}{۹} = ۹ \Rightarrow \frac{۸ - t_s}{t_s} = ۳ \Rightarrow t_s = ۲s$$

مجدداً با استفاده از تشابه S_1 و S_3 داریم:

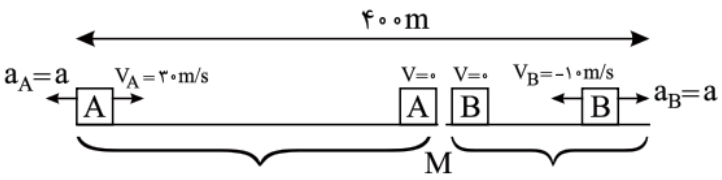
$$(\frac{۱۰ - ۲}{۲})^2 = \frac{S_3}{S_1} \Rightarrow S_3 = ۱۴۴m$$

S_3 برابر با جابه‌جایی از لحظهٔ تغییر جهت تا $t = ۱۰s$ است.

$$۱۴۴ = x_2 - x_{۱۰} \xrightarrow{x_2 = ۸۱m} x_{۱۰} = -۶۳m$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۳ برای آنکه دو متحرک به هم برخورد نکنند و شتاب ترمز حداقل باشد، باید مجموع مسافت طی‌شده دو متحرک برابر با فاصلهٔ اولیهٔ آن‌ها باشد و دقیقاً در یک نقطه توقف کنند. دقت شود که مدت زمان حرکت دو متحرک یکسان نیست و متحرک A دیرتر به نقطهٔ M می‌رسد.



$$۰^2 - ۳۰^2 = ۲(-a)\Delta x_A \Rightarrow \Delta x_A = \frac{۴۵۰}{a}$$

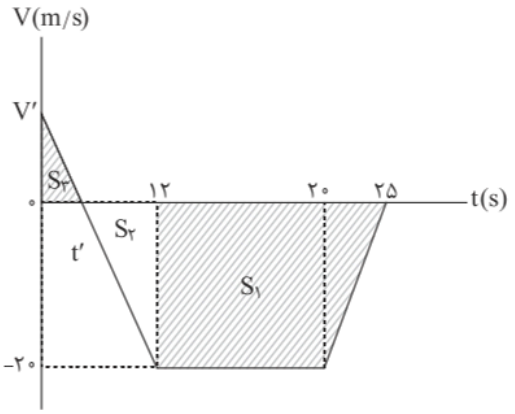
$$۰^2 - (-۱۰)^2 = ۲a\Delta x_B \Rightarrow \Delta x_B = \frac{-۵۰}{a}$$

$$۴۰۰ = |\Delta x_A| + |\Delta x_B| \Rightarrow ۴۰۰ = \frac{۴۵۰}{a} + \frac{۵۰}{a} = \frac{۵۰۰}{a} \Rightarrow a = \frac{۵۰۰}{۴۰۰} = ۱/۲۵ m/s^2$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۵۴ ابتدا جابه‌جایی متحرک را در این بازهٔ زمانی به‌دست می‌آوریم:



$$V_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۲۵s]{V_{av}=۳/۶m/s}\Delta x=۹۰m$$

$$S_۱=\frac{۸+۱۳}{۲}\times ۲۰=۲۱۰m\ ,\ \Delta x=S_۱+S_۲-S_۳\xrightarrow[S_۱=۲۱۰m]{\Delta x=۹۰m}$$

$$\Rightarrow S_۳-S_۲=۱۲۰m\xrightarrow[S_۲=\frac{(۱۲-t')۲۰}{۲}]{S_۳=\frac{V't'}{۲},\ V'=۲۰\frac{t'}{۱۲-t'}}\frac{۱۰t'}{۱۲-t'}-۱۰(۱۲-t')=۱۲۰\Rightarrow t'=۸s$$

$$\Rightarrow V'=\frac{۲۰\times ۸}{۴}=۴۰m/s\Rightarrow\begin{cases}S_۳=\frac{۴۰\times ۸}{۲}=۱۶۰m\\ S_۲=\frac{۲۰\times ۴}{۲}=۴۰m\end{cases}$$

اکنون تندی متوسط را به‌دست می‌آوریم:

$$S_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۲۵S]{\ell=S_۱+S_۲+S_۳}S_{av}=\frac{۲۱۰+۴۰+۱۶۰}{۲۵}$$

$$\Rightarrow S_{av}=\frac{۴۱۰}{۲۵}=۱۶/۴m/s$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۵۵ اگر فرض کنیم جهت حرکت در لحظهٔ t' تغییر کرده است، بنابراین با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان بین دو لحظهٔ صفر تا t' و t' تا ۱۰s داریم:

$$\begin{cases}۱۸=\frac{-۱}{۲}at'^{۲}\\ -۹۸=\frac{۱}{۲}a(۱۰-t')^{۲}\end{cases}\Rightarrow\frac{۱۸}{۹۸}=(\frac{t'}{۱۰-t'})^{۲}\Rightarrow\frac{۳}{۷}=\frac{t'}{۱۰-t'}\Rightarrow t'=۳s$$

اکنون شتاب حرکت متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$۱۸=\frac{-۱}{۲}a\times ۳^{۲}\Rightarrow a=-۴m/s^{۲}$$

بنابراین تندی متحرک در لحظهٔ $t=۲۰s$ برابر است با:

$$V=a(۲۰-۳)\Rightarrow V=-۶۸m/s$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۵۶ برای هر قطار دو لحظه را به‌دست می‌آوریم. یکی لحظه‌ای که قطار به‌طور کامل روی پل قرار می‌گیرد و دیگری لحظه‌ای که ابتدای قطار به انتهای پل می‌رسد. اشتراک این دو بازهٔ زمانی، مدت زمانی را نشان می‌دهد که هر دو قطار روی پل قرار دارند.

$$V_A = ۷۲\,km/h = \frac{۷۲}{۳/۶}\,m/s = ۲۰\,m/s \Rightarrow \begin{cases} t_A = \frac{۵۰۰+۶۰۰}{۲۰} = ۵۵s \\ t'_A = \frac{۵۰۰+۲۰۰۰}{۲۰} = ۱۲۵s \end{cases}$$

یعنی در لحظهٔ $t_A = ۵۵s$ قطار A به‌طور کامل روی پل قرار می‌گیرد و در لحظهٔ $t'_A = ۱۲۵s$ ابتدای قطار A به انتهای پل می‌رسد. به عبارت دیگر در بازهٔ زمانی $۵۵s$ تا $۱۲۵s$ تمام قطار A روی پل قرار دارد. برای قطار B هم به همین ترتیب داریم:

$$V_B = ۹۰\,km/h = \frac{۹۰}{۳/۶}\,m/s = ۲۵\,m/s \Rightarrow \begin{cases} t_B = \frac{۵۰۰+۵۰۰}{۲۵} = ۴۰s \\ t'_B = \frac{۵۰۰+۲۰۰۰}{۲۵} = ۱۰۰s \end{cases}$$

قطار B در بازهٔ زمانی $۴۰s$ تا $۱۰۰s$ به‌طور کامل روی پل قرار دارد. از اشتراک دو بازهٔ $۵۵s$ تا $۱۲۵s$ و همچنین $۴۰s$ تا $۱۰۰s$، بازهٔ $۵۵s$ تا $۱۰۰s$ به‌دست می‌آید. بنابراین دو قطار $۴۵s$ هم‌زمان به‌طور کامل روی پل قرار دارند.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۷ مطابق شکل، چون نمودار نسبت به لحظه‌ای که جهت حرکت متحرک عوض می‌شود، متقارن است، بنابراین در لحظهٔ $t = ۲s$ جهت حرکت متحرک تغییر می‌کند. با استفاده از رابطهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$|\Delta x_۱| = \frac{۱}{۲}|a|t_۱^۲ \xrightarrow[t_۱=۲s]{|a|=۴\frac{m}{s^۲}} |\Delta x_۱| = \frac{۱}{۲}\times ۴ \times ۲^۲ = ۸m$$

$$|\Delta x_۲| = \frac{۱}{۲}|a|t_۲^۲ \xrightarrow[t_۲=۱۰-۲=۸s]{|a|=۴\frac{m}{s^۲}} |\Delta x_۲| = \frac{۱}{۲}\times ۴ \times ۸^۲ = ۱۲۸m$$

اکنون تندی متوسط متحرک را در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت به‌دست می‌آوریم:

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} \xrightarrow[|\Delta x_۱|=۸m\ ,\ |\Delta x_۲|=۱۲۸m]{L=|\Delta x_۱|+|\Delta x_۲|\ ,\ \Delta t=۱۰s} S_{av} = \frac{۱۲۸+۸}{۱۰} = ۱۳۶\frac{m}{s}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۵۸ باتوجه به رابطهٔ مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

چون در لحظهٔ t_2 نوع حرکت متحرک تندشونده است و از طرفی تندی آن کوچک‌تر از تندی متحرک در لحظهٔ t_1 است، بنابراین بین لحظهٔ t_1 تا t_2 جهت حرکت متحرک تغییر کرده است.

$$\begin{matrix} 0-V_1^2=2a\Delta x_1 \\ (0/6V_1)^2-0 \end{matrix} \Rightarrow \frac{|\Delta x_1|}{|\Delta x_2|}=\frac{100}{36}=\frac{25}{9}$$

جابه‌جایی متحرک برابر است با:

$$\begin{cases} |\Delta x_1|-|\Delta x_2|=32 \longrightarrow \frac{25}{9}|\Delta x_2|-|\Delta x_2|=32 \\ |\Delta x_1|=\frac{25}{9}|\Delta x_2| \longrightarrow \frac{16}{9}|\Delta x_2|=32 \rightarrow |\Delta x_2|=18m \\ |\Delta x_1|=50m \end{cases} \Rightarrow L=18+50=68$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵۹ طول جادهٔ بین دو شهر را ℓ در نظر می‌گیریم. مدت زمان رفت و برگشت اتومبیل را برحسب ℓ به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}$$

$$\text{رفت}: s_{av(1)}=\frac{\ell}{\Delta t_1} \Rightarrow 10=\frac{\ell}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1=\frac{\ell}{10}s$$

$$\text{برگشت}: s_{av(2)}=\frac{\ell}{\Delta t_2} \Rightarrow 15=\frac{\ell}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2=\frac{\ell}{15}s$$

حالا تندی متوسط کل حرکت را به دست می‌آوریم:

$$s_{av}=\frac{\ell+\ell}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{\ell+\ell}{\frac{\ell}{10}+\frac{\ell}{15}}=\frac{2\ell}{\frac{5\ell}{30}}=12\frac{m}{s}$$

تندی متوسط به دست آمده را به $\frac{km}{h}$ تبدیل می‌کنیم:

$$s_{av}=12\frac{m}{s}\times\frac{3/6\frac{km}{h}}{1\frac{m}{s}}=43/2\frac{km}{h}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

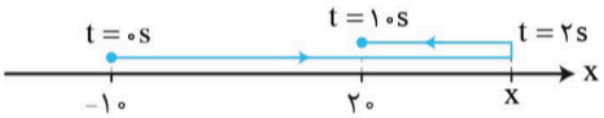
۳۶۰ ابتدا اندازهٔ جابه‌جایی متحرک را به دست می‌آوریم:

$$|\Delta x| = |x_1 - x_0| = |20 - (-10)| = 30\,m$$

طبق گفتهٔ طراح، تندی متوسط ۱/۵ برابر اندازهٔ سرعت متوسط است، پس مسافت طی شده را با این نسبت حساب می‌کنیم:

$$s_{av} = 1/5|v_{av}| \Rightarrow \ell = 1/5|\Delta x| = 1/5 \times 30 = 45\,m$$

چون بیشترین نسبت ممکن تندی متوسط قبل از تغییر جهت به بعد از آن خواسته شده است، متحرک باید مسافت بیشتری قبل از تغییر جهت طی کرده باشد. مسیر حرکت متحرک به صورت شکل زیر است:



باتوجه به اینکه مسافت طی شده $45\,m$ است، مقدار x را به دست می‌آوریم:

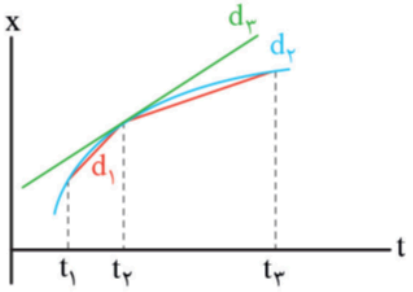
$$\ell = 45\,m \Rightarrow |x - (-10)| + |20 - x| = 45 \Rightarrow x + 10 + x - 20 = 45 \Rightarrow 2x = 55 \Rightarrow x = 27/5\,m$$

حالا نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{s_{av(0,2s)}}{s_{av(2s,10s)}} = \frac{\frac{\ell_{(0,2s)}}{\Delta t_1}}{\frac{\ell_{(2s,10s)}}{\Delta t_2}} = \frac{\frac{37/5}{2}}{\frac{7/5}{8}} = 20$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۶۱ شیب خط d_1 برابر $v_{av(1)}$، شیب خط d_2 برابر $v_{av(2)}$ و شیب خط مماس d_3 برابر v است. باتوجه به شکل، مقایسهٔ درست سرعت‌ها به صورت زیر است:



$$v_{av(1)} > v > v_{av(2)}$$

$$\text{شیب } d_1 > \text{شیب } d_3 > \text{شیب } d_2$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۶۲ در بازهٔ زمانی که مکان متحرک در حال کاهش است که شامل بازهٔ $(۸s,۱۰s)$ است متحرک در حال نزدیک شدن به مبدأ است. بنابراین اندازهٔ سرعت متوسط متحرک را در بازهٔ $(۸s,۱۰s)$ باید به دست بیاوریم. روابط سرعت متوسط در بازهٔ $(۰,۸s)$ و $(۰,۱۰s)$ می‌نویسیم تا جابه‌جایی هر بازه به دست بیاید:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow\begin{cases}v_{av(۰,۸s)}=\frac{\Delta x_۱}{\Delta t_۱}\Rightarrow ۲۰=\frac{\Delta x_۱}{۸}\Rightarrow \Delta x_۱=۱۶۰m\\ v_{av(۰,۱۰s)}=\frac{\Delta x_۲}{\Delta t_۲}\Rightarrow ۱۲=\frac{\Delta x_۲}{۱۰}\Rightarrow \Delta x_۲=۱۲۰m\end{cases}$$

با استفاده از دو جابه‌جایی به دست آمده، جابه‌جایی متحرک در بازهٔ $(۸s,۱۰s)$ را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{(۸s,۱۰s)}=\Delta x_{(۰,۱۰s)}-\Delta x_{(۰,۸s)}=۱۲۰-۱۶۰=-۴۰m$$

حالا سرعت متوسط متحرک در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow v_{av(۸s,۱۰s)}=\frac{-۴۰}{۲}=-۲۰\frac{m}{s}$$

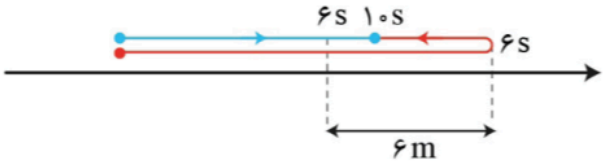
تندی متحرک در این بازه ثابت و برابر $۲۰\frac{m}{s}$ است.

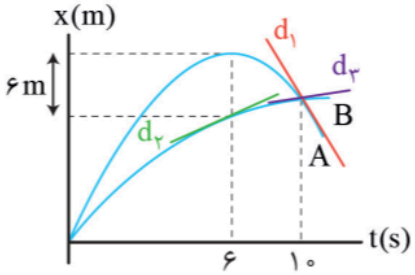
(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۶۳ در بازهٔ $(۰,۶s)$ باتوجه به شیب خط مماس بر منحنی هر دو نمودار می‌توان گفت که تندی متحرک A در $t=۰$ بیشتر از تندی متحرک B در $t=۰$ است با گذشت زمان تا $t=۶s$ شیب خط مماس بر نمودار A به طور پیوسته کاهش می‌یابد و به صفر می‌رسد و شیب مماس بر نمودار B نیز کم می‌شود.

بنابراین در بازهٔ $(۰,۶s)$ یک لحظه یافت می‌شود که تندی متحرک B با تندی متحرک A برابر باشد و در این لحظه بیشترین فاصلهٔ دو متحرک را داریم زیرا در این لحظه به بعد سرعت متحرک B بیشتر از A است و فاصلهٔ بین آن‌ها کاهش می‌یابد. (مورد (الف) نادرست است.)

در بازهٔ $(۰,۱۰s)$ مسیر حرکت دو متحرک به صورت شکل زیر است. باتوجه به مسیر، اختلاف مسافتی که دو متحرک طی می‌کنند کمتر از $۱۲m$ است، پس اختلاف تندی متوسط دو متحرک در این بازه کمتر از $\frac{۱۲}{۱۰}=۱/۲\frac{m}{s}$ است. (مورد (ب) نادرست است.)





بردارهای سرعت و مکان متحرک A در بازهٔ $(۶s,۱۰s)$ خلاف جهت هم هستند. در این بازه اندازهٔ شیب مماس A از صفر تا شیب $d_۱$ تغییر می‌کند و شیب مماس B از خط $d_۲$ تا شیب مماس $d_۳$ تغییر می‌کند. بنابراین یک لحظه در این بازه می‌توان یافت که اندازهٔ شیب مماس این دو با هم برابر می‌شود. بنابراین مورد (پ) درست است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

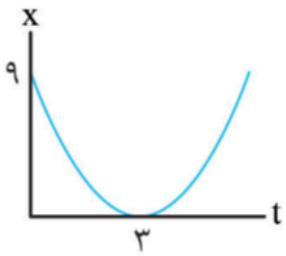
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۶۴ بررسی موارد

الف درست؛

$$\begin{cases} x_{۲s} = ۲^۲ + ۹ - ۶(۲) = ۱m \\ x_{۴s} = ۴^۲ + ۹ - ۶(۴) = ۱m \end{cases} \Rightarrow \Delta x = ۰ \Rightarrow v_{av} = ۰$$

ب نادرست؛ نمودار مکان - زمان متحرک را رسم می‌کنیم.



$$x = t^۲ + ۹ - ۶t = (t-۳)^۲$$

باتوجه به نمودار، متحرک در $t = ۳s$ تغییر جهت داده است. بنابراین تندی متوسط در بازهٔ $(۰,۴s)$ که شامل لحظهٔ تغییر جهت است بزرگتر از اندازهٔ سرعت متوسط در این بازه می‌باشد.

پ نادرست؛ باتوجه به نمودار مکان - زمان، متحرک در $t = ۳s$ به $x = ۰$ رسیده است، اما از آن عبور نکرده است. بنابراین بردار مکان تغییر جهت نداده است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۶۵ تغییر جهت متحرک در لحظه‌های $t_۱ = ۲s$ و $t_۲ = ۸s$ رخ داده است. (قله‌ها و دره‌های نمودار مکان - زمان، لحظات تغییر جهت متحرک هستند.) مکان متحرک در $t = ۸s$ را به دست می‌آوریم:

$$s_{av(۲s,۸s)} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{x_{۸s} - (-۱۰)}{۸-۲} = \frac{x_{۸s} + ۱۰}{۶} = ۵ \Rightarrow x_{۸s} = ۲۰m$$

در بازهٔ $(۵s,۱۳s)$ متحرک در مکان‌های مثبت قرار دارد. بنابراین در این بازه بردار مکان متحرک در جهت محور است. تندی متوسط در این بازه را به دست می‌آوریم:

$$s_{av(۵s,۱۳s)} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۲(۲۰)}{۱۳-۵} = \frac{۴۰}{۸} = ۵\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

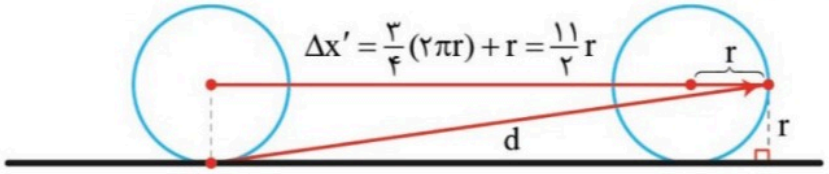
۳۶۶ ابتدا مسافتی که اتومبیل در مدت $۰/۰۹s$ جلو می‌رود را به دست می‌آوریم. این مسافت برابر جابه‌جایی مرکز چرخ نیز می‌باشد:

$$\Delta x = v.\Delta t = ۲۰ \times ۰/۰۹ = ۱/۸m$$

تعداد دوری که چرخ می‌زند را به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{\Delta x}{۲\pi r} \Rightarrow n = \frac{۱/۸}{۲ \times ۳ \times ۰/۴} = \frac{۳}{۴}$$

بردار جابه‌جایی تکه سنگ به صورت شکل زیر است:



$$d = \sqrt{\Delta x'^۲ + r^۲} = \sqrt{\frac{۱۲۱}{۴}r^۲ + r^۲} = \sqrt{\frac{۱۲۵}{۴}r^۲} = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲}r = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲} \times ۰/۴ = \sqrt{۵}m$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۶۷ ابتدا مدت زمان رسیدن اتومبیل به ابتدا و انتهای قطار را به دست می‌آوریم. هنگامی که اتومبیل هم‌جهت قطار حرکت می‌کند، اتومبیل باید ۴۰۰ متر بیشتر از قطار طی کند. بنابراین:

$$v_۲t_R - v_۱t_R = ۴۰۰ \Rightarrow (v_۱ - v_۲)t_R = ۴۰۰ \Rightarrow (۳۰-۲۰)t_R = ۴۰۰ \Rightarrow t_R = ۴۰s$$

($v_۱$ سرعت اتومبیل و $v_۲$ سرعت قطار است.)

در برگشت، اتومبیل و قطار باید مجموعاً ۴۰۰ متر طی کنند تا اتومبیل از ابتدا به انتهای قطار برسد. مدت این حرکت برابر است با:

$$(v_۱t_B + v_۲t_B) = ۴۰۰ \Rightarrow (v_۱ + v_۲)t_B = ۴۰۰ \Rightarrow ۵۰t_B = ۴۰۰ \Rightarrow t_B = ۸s$$

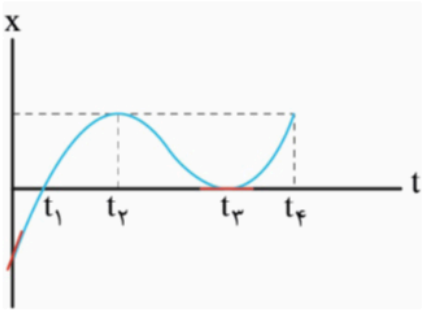
بنابراین $t' = t_R + t_B = ۴۸s$ است. پس مسافت طی شده توسط اتومبیل برابر است با:

$$\ell = v_۱t' = ۳۰ \times ۴۸ = ۱۴۴۰m$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۶۸ **به بررسی هریک از موارد می‌پردازیم:**

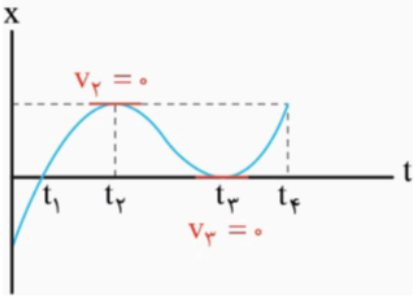
الف نادرست؛ شیب خط مماس بر نمودار در لحظه‌های $t = ۰$ و $t_۳$ را تعیین می‌کنیم (شیب خط مماس در نمودار $(x-t)$ برابر سرعت در هر لحظه است.)



$$\left.\begin{matrix} v_۰ < ۰ \\ v_{t_۲} = ۰ \end{matrix}\right\} \Delta v = v_{t_۲} - v_۰ < ۰ \Rightarrow a_{av(۰,t_۲)} < ۰$$

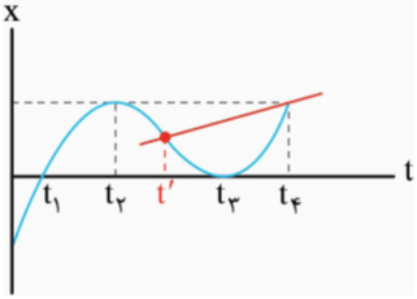
ب نادرست؛ تنها در لحظهٔ $t_۱$ جهت بردار مکان متحرک عوض شده، که در این لحظه متحرک جهت حرکتش عوض نشده است. توجه کنید در $t_۳$ متحرک از $x = ۰$ عبور نکرده است، بنابراین در این لحظه جهت بردار مکان عوض نشده است.

پ درست؛ در بازهٔ $(t_۲, t_۳)$ بردار مکان در جهت محور است $(x > ۰)$ و طول بردار مکان کاهش می‌یابد. شیب خط مماس بر نمودار در $t_۲$ و $t_۳$ برابر صفر است، پس شتاب متوسط در این بازه نیز برابر صفر است.



$$a_{av} = \frac{v_۳ - v_۲}{\Delta t} = ۰$$

ت درســـت؛ در لحظه‌ای بین $t_۲$ و $t_۳$ تا لحظهٔ $t_۴$ بردار شتاب در جهت محور است. (دهانهٔ نمودار به ســـمت بالا است). توجه کنید منظور از شتاب، شتاب لحظه‌ای است. باتوجه به اینکه شیب خط واصل در این بازه مثبت است، پس سرعت متوسط در این بازه مثبت است.



(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۶۹ شتاب در نمودار سرعت - زمان برابر شیب مماس بر نمودار است. در بازهٔ $(۲s,۱۰s)$، شیب خط مماس بر نمودار مثبت است، پس شتاب در این بازه مثبت و در جهت محور است. سرعت لحظهٔ $۱۰s$ را با استفاده از رابطهٔ شتاب متوسط در بازهٔ $(۲s,۱۰s)$ به دست می‌آوریم:

$$a_{av(۲s,۱۰s)}=\frac{v_{۸s}-v_{۲s}}{۱۰-۲}\Rightarrow +۲=\frac{v_{۱۰s}-(-۹)}{۸}\Rightarrow v_{۸s}=۷\frac{m}{s}$$

با استفاده از شتاب متوسط ۲ ثانیه پنجم $(۸s\le t\le ۱۰s)$، سرعت در $t=۸s$ را به دست می‌آوریم:

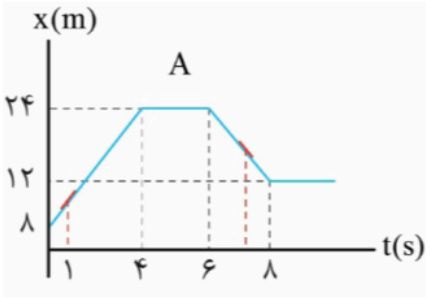
$$a_{av}=\frac{v_{۱۰s}-v_{۸s}}{۱۰-۸}\Rightarrow ۰/۵=\frac{۷-v_{۸s}}{۲}\Rightarrow v_{۸s}=۶\frac{m}{s}$$

شتاب متحرک در $t=۸s$ برابر شیب خط مماس نمودار در $t=۸s$ است. پس:

$$a_{۸s}=\frac{۶-۰}{۸-۲}=۱\frac{m}{s^۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۷۰ در شکل A برای یافتن سرعت در لحظات $t_۱=۱s$ و $t_۲=۲s$ باید شیب خط مماس بر نمودار را در این لحظات به دست آوریم.

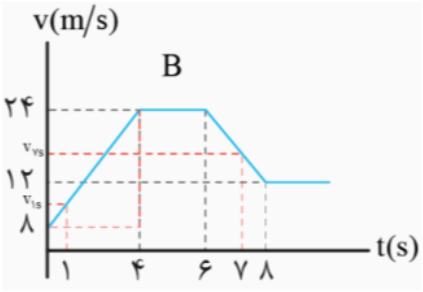


$$v_{۱s}=\frac{۲۴-۸}{۴-۰}=\frac{۱۶}{۴}=۴\frac{m}{s}\ ,\ v_{۷s}=\frac{۱۲-۲۴}{۸-۶}=\frac{-۱۲}{۲}=-۶\frac{m}{s}$$

حالا شتاب متوسط متحرک A را به دست می‌آوریم:

$$a_{av_A}=\frac{v_{۷s}-v_{۱s}}{۷-۱}=\frac{-۶-۴}{۶}=\frac{-۱۰}{۶}=-\frac{۵}{۳}\frac{m}{s^۲}$$

در شکل B سرعت متحرک را در لحظات $t=۱$ و $t=۷$ به نمودار به دست می‌آوریم:
از این نکته استفاده می‌کنیم که شیب خط در بازه‌های $(۰,۴)$ یا $(۶,۸)$ ثابت است.



$$\frac{۲۴-۸}{۴-۰}=\frac{v_{۱s}-۸}{۱-۰}\rightarrow ۴=v_۱-۸\rightarrow v_{۱s}=۱۲\frac{m}{s}$$

$$\frac{۱۲-۲۴}{۸-۶}=\frac{v_{۷s}-۲۴}{۷-۶}\rightarrow\frac{-۱۲}{۲}=v_{۷s}-۲۴\rightarrow v_{۷s}=۱۸\frac{m}{s}$$

حالا شتاب متوسط متحرک B را به دست می‌آوریم:

$$a_{av_B}=\frac{v_{۷s}-v_{۱s}}{۷-۱}=\frac{۱۸-۱۲}{۶}=۱\frac{m}{s^۲}$$

درنهایت نسبت خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\frac{a_{av_A}}{a_{av_B}}=\frac{\frac{-۵}{۳}}{۱}=-\frac{۵}{۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۷۱ ابتدا مدت حرکت متحرک (۱) در طی مسیر AB را به دست می‌آوریم:

$$v_1 = \frac{\Delta x}{\Delta t_1} \Rightarrow ۱۶ = \frac{۳۲۰}{\Delta t_1} \Rightarrow \Delta t_1 = ۲۰s$$

چون متحرک (۲)، ۲ ثانیه پس از متحرک (۱) از A عبور کرده است پس در مدت ۲۰ ثانیه حرکت متحرک (۱)، متحرک (۲)، ۱۸ ثانیه در حرکت در مسیر AB بوده است. مسافتی که متحرک (۲) در این مدت طی کرده است را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_2 = v_2 \Delta t_2 = ۱۵ \times ۱۸ = ۲۷۰m$$

بنابراین متحرک (۲) در فاصلهٔ $۳۲۰ - \Delta x_2 = ۳۲۰ - ۲۷۰ = ۵۰m$ از نقطهٔ B است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۷۲ ابتدا معادلهٔ حرکت متحرک B را می‌نویسیم.

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۰ - ۴۵۰}{۳۰ - ۰} = -۱۵\frac{m}{s} \qquad x_B = v_B t + x_{۰} = -۱۵t + ۴۵۰$$

لحظه‌ای که متحرک B از مکان $x = ۶۰m$ عبور می‌کند را به دست می‌آوریم.

$$x_B = ۶۰ \Rightarrow -۱۵t + ۴۵۰ = ۶۰ \Rightarrow t = ۲۶(s)$$

لحظهٔ $t = ۲۶(s)$ و $x = ۶۰m$ در معادلهٔ حرکت A نیز صدق می‌کند. بنابراین معادلهٔ حرکت A را تعیین می‌کنیم:

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۶۰ - (-۲۰۰)}{۲۶ - ۰} = \frac{۲۶۰}{۲۶} = ۱۰\frac{m}{s} \qquad x_A = v_A t + x_{۰A} \Rightarrow x_A = ۱۰t - ۲۰۰$$

باتوجه به نمودار پس از عبور دو متحرک از کنار هم، در صورتی که مکان دو متحرک قرینه هم باشد، می‌تواند فاصلهٔ آن‌ها از مبدأ یکسان شود. پس:

$$x_A = -x_B \Rightarrow ۱۰t - ۲۰۰ = (-۱۵t + ۴۵۰) \Rightarrow ۲۵t = ۲۵۰ \Rightarrow t = ۵۰s$$

توجه کنید که طراح گفته است چند ثانیه پس از عبور دو متحرک از کنار هم فاصلهٔ دو متحرک از مبدأ یکسان می‌شود، پس خواستهٔ طراح $t - ۲۶ = ۲۴s$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۷۳ باتوجه به نمودار و صورت تست، در $t = ۰$ متحرک B، ۲۰۰ متر جلوتر از متحرک A است و در $t = ۵۰s$، متحرک A، $۱۲۰۰ - ۹۰۰ = ۳۰۰m$ جلوتر از متحرک B است. بنابراین در مدت ۵۰ ثانیهٔ نخست، متحرک A، $۲۰۰ + ۳۰۰ = ۵۰۰m$ بیشتر از متحرک B جابه‌جا شده است، پس سرعت A به اندازهٔ $\frac{۵۰۰}{۵۰} = ۱۰\frac{m}{s}$ بیشتر از سرعت متحرک B است.

بنابراین در هر ثانیه فاصلهٔ بین دو متحرک ۱۰m تغییر می‌کند. اگر در لحظهٔ t دو متحرک به هم رسیده باشند، ۶ ثانیه قبل از این لحظه و ۶ ثانیه بعد از این لحظه فاصلهٔ دو متحرک برابر ۶۰m است. پس $t_1 = t - ۶s$ و $t_2 = t + ۶s$ است و $|t_2 - t_1| = ۱۲s$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

www.MrKonkor.com
SanjeshCloud

۳۷۴ چون تندی اتومبیل (۱) بیشتر از (۲) است، اتومبیل (۱) زودتر به شهر مقابل می‌رسد و برمی‌گردد. چون تندی اتومبیل (۱)، ۴ برابر تندی اتومبیل (۲) است. قبل از اینکه اتومبیل (۲) به شهر مقابل برسد، برای دومین بار اتومبیل (۱) به آن می‌رسد. (در حالت کلی اگر $v_1 > 2v_2$ باشد، اتومبیل (۱) قبل از آنکه اتومبیل (۲) به شهر مقابل برسد، برای دومین بار به اتومبیل (۲) می‌رسد. بنابراین مسیر حرکت دو اتومبیل تا رسیدن به یکدیگر در دومین مرتبه به صورت شکل زیر است:



باتوجه به شکل مسیر حرکت دو متحرک، مسافت طی شده توسط متحرک (۱) به اندازهٔ فاصلهٔ بین دو شهر بیشتر از مسافتی است که متحرک (۲) طی کرده است. پس:

$$\ell_1 - \ell_2 = 80\,km \Rightarrow v_1 t - v_2 t = 80 \Rightarrow 40t - 10t = 80 \Rightarrow t = \frac{8}{3}h = 160\,min$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۷۵ باتوجه به نمودار اندازهٔ جابه‌جایی متحرک در ۵ ثانیهٔ نخست با اندازهٔ جابه‌جایی در بازهٔ $(5s, 9s)$ با هم برابر است. اندازه جابه‌جایی در این بازه‌ها در $|\Delta x|$ در نظر می‌گیریم. بنابراین سرعت متحرک در این دو بازه که ثابت می‌باشد را به دست می‌آوریم.

$$v_{(0,5s)} = v_1 = \frac{-|\Delta x|}{5-0} = \frac{-\Delta x}{5} \qquad v_{(5s,9s)} = v_2 = \frac{|\Delta x|}{9-5} = \frac{|\Delta x|}{4}$$

شتاب متوسط در ۹ ثانیهٔ نخست را برحسب v_2, v_1 می‌نویسیم و برابر $4\frac{m}{s^2}$ قرار می‌دهیم تا $|\Delta x|$ به دست بیاید:

$$a_{av(0,9s)} = \frac{v_2 - v_1}{9-0} = \frac{\frac{|\Delta x|}{4} + \frac{|\Delta x|}{5}}{9} = \frac{\frac{9|\Delta x|}{20}}{9} = 4 \Rightarrow |\Delta x| = 80\,m$$

پس $v_1 = -16\frac{m}{s}$ و $v_2 = +20\frac{m}{s}$ است. با استفاده از خط دوم نمودار، مکان متحرک در $t = 5s$ را به دست می‌آوریم:

$$v_2 = v_{av(5s,13s)} = \frac{x_{13s} - x_{5s}}{13-5} = 20 \Rightarrow \frac{60 - x_{5s}}{8} = 20 \Rightarrow x_{5s} = -100\,m$$

حالا مکان متحرک در $t = 3s$ را با استفاده از خط (۱) به دست می‌آوریم:

$$v_1 = v_{av(3s,5s)} = \frac{x_{5s} - x_{3s}}{5-3} = -16 \Rightarrow \frac{-100 - x_{3s}}{2} = -16 \Rightarrow x_{3s} = -68\,m$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۷۶ تندی متحرک در ۴ ثانیه نخست را v_1 و تندی آن پس از لحظهٔ $t=4s$ را v_2 در نظر می‌گیریم. روابط تندی متوسط، سرعت متوسط و شتاب متوسط را در بازهٔ $(0,t)$ می‌نویسیم:

$$s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}\Rightarrow\frac{10}{3}=\frac{4v_1+(t-4)v_2}{t}\Rightarrow 4v_1+(t-4)v_2=\frac{10t}{3}$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 2=\frac{-4v_1+(t-4)v_2}{t}\Rightarrow -4v_1+(t-4)v_2=2t$$

$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{v_2+v_1}{t}\Rightarrow v_1+v_2=\frac{t}{2}$$

با حل سه معادله و سه مجهول بالا، v_1، v_2 و t را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}4v_1+(t-4)v_2=\frac{10t}{3}\\ -4v_1+(t-4)v_2=2t\\ v_1+v_2=\frac{t}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_1=2\frac{m}{s}\\ v_2=4\frac{m}{s}\\ t=12s\end{cases}$$

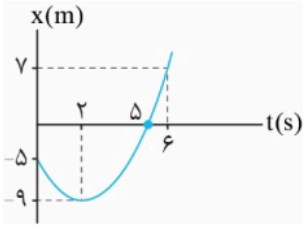
حالا مکان متحرک در $t=4s$ و سپس مکان در $t=10s$ را به دست می‌آوریم:

$$x_{4s}=-v_1(4)+x_0=-2(4)+4=-4m \qquad x_{10s}=v_2(10-4)+x_{4s}=4(6)-4=20m$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۷۷ نمودار مکان – زمان متحرک را رسم می‌کنیم.

باتوجه به نمودار، اختلاف مسافت و بزرگی جابه‌جایی را حساب می‌کنیم:



$$\ell-|\Delta x|=(4+16)-|7-(-5)|=20-12=8m$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۷۸ با توجه به جابه‌جایی در $3T$ ثانیهٔ نخست، سرعت متحرک A در این بازه که همان سرعت اولیه قسمت حرکت شتابدار آن نیز است، بیشتر از B است.

$$\Delta x_{A(0,3T)}>\Delta x_{B(0,3T)}\Rightarrow v_{0A}>v_{0B}$$

باتوجه به نمودار در قسمت شتابدار، جابه‌جایی متحرک A در مدت $7T-3T=4T$ کمتر از جابه‌جایی متحرک B در این بازه است. پس:

$$\Delta x_A<\Delta x_B\Rightarrow\frac{v_{0A}+v_A}{2}\Delta t<\frac{v_{0B}+v_B}{2}\Delta t\xrightarrow{v_{0A}>v_{0B}}v_A<v_B$$

بنابراین سرعت نهایی B بیشتر از A است.

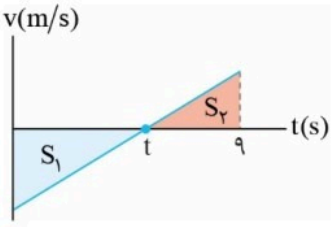
حالا رابطهٔ شتاب را می‌نویسیم و شتاب دو متحرک را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta t_A=\Delta t_B}a_B>a_A \qquad \Delta v=v-v_0\xrightarrow[v_A<v_B]{v_{0A}>v_{0B}}\Delta v_B>\Delta v_A$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۷۹ چون اندازهٔ سرعت متوسط با تندی متوسط برابر نیست، نتیجه می‌گیریم متحرک در ۹ ثانیهٔ نخست حرکتش، تغییر جهت داده است. اگر لحظهٔ تغییر جهت را t در نظر بگیریم، نمودار سرعت زمان متحرک به صورت شکل زیر خواهد بود:



باتوجه به مساحت‌های رنگی، تندی متوسط و اندازهٔ سرعت متوسط را به دست می‌آوریم و نسبت آن‌ها را برابر ۰/۶ قرار می‌دهیم تا نسبت S_1 به S_2 به دست بیاید:

$$\begin{cases} v_{av}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{-S_1+S_2}{\Delta t} \\ s_{av}=\dfrac{\ell}{\Delta t}=\dfrac{S_1+S_2}{\Delta t} \end{cases} \Rightarrow \frac{|v_{av}|}{s_{av}}=\frac{|-S_1+S_2|}{S_1+S_2}=0/6 \Rightarrow S_1=4S_2$$

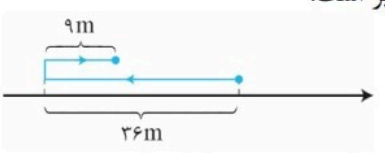
باتوجه به تشابه مثلث‌ها، لحظهٔ تغییر جهت را به دست می‌آوریم:

$$\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{t}{9-t}\right)^2 \Rightarrow 4=\left(\frac{t}{9-t}\right)^2 \Rightarrow 2=\frac{t}{9-t} \Rightarrow t=6s$$

حالا مساحت‌های S_1 و S_2 را تعیین می‌کنیم:

$$\begin{cases} S_1=\dfrac{|v_0|\times t}{2} \xrightarrow{|v_0|=|a|t} S_1=\dfrac{(2\times 6)\times 6}{2}=36 \\ S_2=\dfrac{1}{4}S_1=9 \end{cases}$$

بنابراین مسیر حرکت متحرک به صورت شکل زیر است:



با توجه به مسیر بیشترین فاصلهٔ متحرک از نقطهٔ شروع برابر ۳۶m است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۳۸۰ ابتدا سرعت متوسط در دو بازه که با سرعت لحظهٔ وسط هر کدام از بازه‌ها برابر است را به دست می‌آوریم:

$$v_{av(1s,5s)}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{6-2}{5-1}=1\frac{m}{s} \Rightarrow v_{3s}=1\frac{m}{s} \qquad v_{av(5s,7s)}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{20-6}{7-5}=7\frac{m}{s} \Rightarrow v_{6s}=7\frac{m}{s}$$

شتاب متحرک را به دست می‌آوریم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{7-1}{6-3}=2\frac{m}{s^2}$$

سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ نخست حرکت برابر سرعت وسط بازه یعنی $t=5s$ است، پس:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow 2=\frac{v_{5s}-v_{3s}}{5-3} \Rightarrow 2=\frac{v_{5s}-1}{5-3} \Rightarrow v_{5s}=5\frac{m}{s} \Rightarrow v_{av(0,10s)}=v_{5s}=5\frac{m}{s}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۸۱ ابتدا سرعت در $t=۳s$ را با استفاده از شیب خط مماس تعیین می‌کنیم:

$$v_{۳s}=\frac{۸۰-۶۲}{۳}=۶\frac{m}{s}$$

با استفاده از معادلهٔ مستقل از شتاب در بازهٔ $(۳s,۱۱s)$، سرعت متحرک در $t=۱۱s$ را تعیین می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v_{۳s}+v_{۱۱s}}{۲}\Delta t\Rightarrow ۰-۸۰=\frac{۶+v_{۱۱s}}{۲}\times ۸\Rightarrow v_{۱۱s}=-۲۶\frac{m}{s}$$

شتاب را تعیین می‌کنیم:

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_{۱۱s}-v_{۳s}}{۱۱-۳}=\frac{-۲۶-۶}{۸}=\frac{-۳۲}{۸}=-۴\frac{m}{s^۲}$$

سرعت اولیه را به دست می‌آوریم:

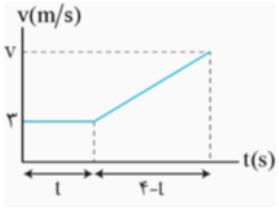
$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow -۴=\frac{v_{۳s}-v_۰}{۳-۰}\Rightarrow -۱۲=۶-v_۰\Rightarrow v_۰=۱۸\frac{m}{s}$$

حالا با استفاده از معادلهٔ مکان – زمان، مکان اولیه را حساب می‌کنیم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰\xrightarrow{t=۳s}۸۰=\frac{۱}{۲}(-۴)(۳)^۲+۱۸(۳)+x_۰\Rightarrow x_۰=۴۴m$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۸۲ نمودار سرعت – زمان حرکت متحرک به صورت شکل زیر است. باتوجه به شتاب در مرحلهٔ دوم حرکت v را به دست می‌آوریم:



$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{v-۳}{۴-t}\Rightarrow v=۱۱-۲t$$

حالا مساحت زیر نمودار در t ثانیه ابتدایی را برابر $\frac{۱}{۷}$ کل مساحت زیر نمودار قرار می‌دهیم تا t به دست بیاید:

$$۳t=\frac{۱}{۷}(۳t+(\frac{۱۴-۲t}{۲})\times(۴-t))\Rightarrow ۲۱t=۳t+t^۲-۱۱t+۲۸\Rightarrow t^۲-۲۹t+۲۸=۰\Rightarrow t=۱s$$

در نهایت مسافت طی شده را حساب می‌کنیم:

$$\ell=۳t+(t^۲-۱۱t+۲۸)=t^۲-۸t+۲۸=۱-۸+۲۸=۱-۸+۲۸=۲۱m$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

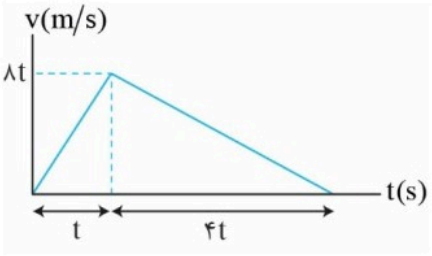
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۸۳ زمان حرکت با شتاب $۸\ \frac{m}{s^۲}$ را t در نظر می‌گیریم. بنابراین بیشترین سرعت متحرک در طی مسیر و زمان حرکت کندشونده برابر است با:

$$v_t = a_۱ t + v_۰ = ۸t$$

$$a_۲ = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۰ - ۷v_t}{t_۲} \Rightarrow -۲ = \frac{-v_t}{t} = \frac{-۸t}{t_۲} \Rightarrow t_۲ = ۴t$$

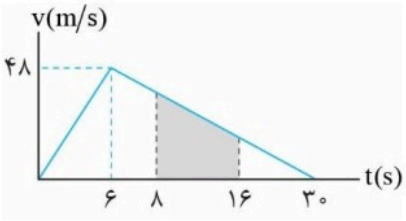
نمودار سرعت – زمان متحرک به صورت زیر می‌شود:



طبق گفتهٔ طراح، مسافت طی شده که برابر با مساحت سطح زیر نمودار $(v-t)$ است برابر $۷۲۰m$ است. پس:

$$S = \frac{۸t \times ۵t}{۲} = ۷۲۰ \Rightarrow t^۲ = ۳۶ \Rightarrow t = ۶s$$

بنابراین نمودار سرعت – زمان به صورت شکل زیر می‌شود. حالا مساحت زیر نمودار در ۸ ثانیهٔ دوم حرکت یعنی بازهٔ $(۸s,۱۶s)$ را به دست می‌آوریم:



$$\Delta x_{(۸s,۱۶s)} = S = v_{av} \times \Delta t \Rightarrow \Delta x_{(۸s,۱۶s)} = v_{۱۲s} \times (۱۶-۸)$$

$$\xrightarrow{v_{۱۲s}=a_۲t+v_{۶s}=-۲(۱۲-۶)+۴۸=۳۶} \Delta x_{(۸s,۱۶s)} = ۳۶ \times ۸ = ۲۸۸m$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۸۴ سرعت متوسط A در لحظهٔ t را به دست می‌آوریم. چون دهانهٔ سهمی رو به پایین است. شتاب متحرک A منفی است، پس:

$$v_A = a_A t + v_۰ \Rightarrow v_{t(A)} = -۲t + v_۰$$

باتوجه به تقارن نمودار، سرعت اولیه متحرک A هم اندازه با سرعت متحرک A در لحظهٔ t و قرینهٔ آن است، پس تندی متحرک A در لحظهٔ t برابر است با:

$$v_{t(A)} = -۲t - v_{t(A)} \Rightarrow v_{t(A)} = -t \Rightarrow |v_A| = t$$

تندی متحرک B را نیز به دست می‌آوریم:

$$v_B = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۳۶}{t} \Rightarrow |v_B| = \frac{۳۶}{t}$$

طبق گفتهٔ طراح، دو تندی را با هم برابر قرار می‌دهیم تا لحظهٔ t به دست بیاید:

$$|v_A| = |v_B| \Rightarrow t = \frac{۳۶}{t} \Rightarrow t = ۶s$$

طبق تقارن، مکان تغییر جهت متحرک A در $t = ۳s$ است. پس مسافت طی شده توسط متحرک A در ۶ ثانیهٔ نخست دو برابر مسافت در بازهٔ $(۳s,۶s)$ است.

$$v_{۶s}^۲ - v_{۳s}^۲ = ۲a\Delta x_{(۳s,۶s)} \Rightarrow (-۶)^۲ - ۰ = ۲(-۲)\Delta x \Rightarrow |\Delta x_{(۳s,۶)}| = ۹m \Rightarrow \ell_{(۰.۶s)} = ۲|\Delta x_{(۳s,۶s)}| = ۱۸m$$

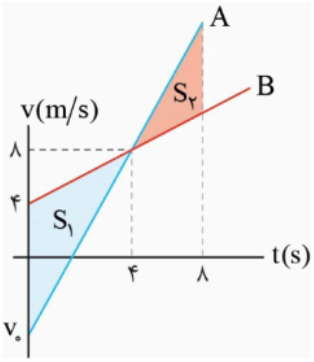
مجموع مسافت طی شده توسط متحرک‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\ell_A + \ell_B = ۱۸ + ۳۶ = ۵۴m$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۸۵ باتوجه به نمودار تا لحظهٔ $t = ۴s$ سرعت متحرک B بیشتر از A است. بنابراین در این بازه فاصلهٔ بین دو متحرک افزایش می‌یابد. پس از $t = ۴s$، سرعت A بیشتر از B می‌شود و A شروع به جبران فاصلهٔ عقب افتاده‌اش می‌کند. طبق تشابه بین دو مثلث مشخص شده در شکل زیر دو متحرک در $t = ۸s$ مجدداً به هم می‌رسند، پس بیشترین فاصلهٔ بین دو متحرک در ۵ ثانیه نخست در $t = ۴s$ رخ می‌دهد و برابر با مساحت مثلث $S_۱$ است.



$$S_۱ = ۲۴ \Rightarrow \frac{(۴ - V_۰) \times ۴}{۲} = ۲۴$$

$$\Rightarrow V_۰ = -۸ \frac{m}{s}$$

شتاب متحرک A را به دست می‌آوریم:

$$a_A = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{v_{۴s} - v_۰}{۴ - ۰} = \frac{۸ - (-۸)}{۴} = ۴ \frac{m}{s^۲}$$

از لحظهٔ $t = ۰$ تا لحظهٔ تغییر جهت متحرک A، این متحرک خلاف جهت محور حرکت کرده است. با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان جابه‌جایی در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$V^۲ - V_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - ۸^۲ = ۲(۴)\Delta x \Rightarrow \Delta x_A = -۸m \Rightarrow \ell_A = |\Delta x_A| = ۸m$$

نکته اگر دو متحرک از یک مکان در $t = ۰$ عبور کنند (هر دو شتاب ثابت یا یکی شتاب ثابت و دیگری سرعت ثابت حرکت کنند) و در لحظهٔ t سرعتشان با هم برابر باشد، در لحظهٔ ۲t به هم می‌رسند و بیشترین فاصلهٔ بین آن‌ها تا قبل از رسیدن به هم در لحظهٔ t رخ می‌دهد.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۳۸۶ اگر زمان پیمایش کل مسیرِ L توسط اتومبیل تند روی ۱ با تندی $v_۱$ برابر t و توسط اتومبیل کند روی ۲ با تندی $v_۲$ برابر $t + ۹$ باشد آنگاه خواهیم داشت:

$$L = v_۱ t \quad (۱)$$

$$L = v_۲ (t + ۹) \quad (۲)$$

$$L_۱ = ۲۰ v_۱ \quad (۳)$$

$$L_۲ = ۲۰ v_۲ \quad (۴)$$

$$L_۱ + L_۲ = L \quad (۵)$$

از ۵ معادلهٔ بالا خواستهٔ مساله t بدست می‌آید. داریم:

$$۲۰ v_۱ + ۲۰ v_۲ = L$$

$$\frac{۲۰L}{t} + ۲۰L(t + ۹) = L$$

$$\frac{۱}{t} + \frac{۱}{(t+۹)} = \frac{۱}{۲۰} \rightarrow \frac{t + ۹ + t}{t(t+۹)} = \frac{۱}{۲۰} \rightarrow \frac{۲t + ۹}{t^۲ + ۹t} = \frac{۱}{۲۰} \rightarrow ۴۰t + ۱۱۰ = t^۲ + ۹t \rightarrow t = ۳۶ \min$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۸۷ مطابق نمودار، متحرک ابتدا با تندی ثابت ۱۰ متر بر ثانیه در جهت مثبت محور x و در طرف منفی محور در حرکت است. وقتی به ۲۰ متری پشت مبدا می‌رسد از تندی‌اش کاسته می‌شود تا در لحظهٔ ۵ از مبدا بگذرد و اندکی بعد در ۴ متری جلوی مبدا بطور لحظه‌ای ساکن شود و تغییر جهت دهد. سپس حرکت تندشونده‌ای را در خلاف محور آغاز کند.

این نشان می‌دهد که متحرک که ابتدا بدون شتاب حرکت می‌کرده ناگهان تحت شتابی در خلاف جهت حرکت قرار گرفته است. نشان می‌دهیم، هرگاه نمودار سرعت - مکان یک سهمی افقی باشد، شتاب ثابت است:

$$x = Av^2 + B$$

$$x = 4 \rightarrow v = 0 \Rightarrow B = 4$$

$$x = -20 \rightarrow v = \pm 10 \Rightarrow A = -0/24$$

و

$$x = -0/24v^2 + 4$$

پس

$$* \quad v^2 - \frac{400}{24} = \frac{100}{24}x$$

معادلهٔ مکان- سرعت آن است. حال می‌توان نوشت:

از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ مستقل از زمان $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ مشخص می‌شود که حرکت، شتابدار با شتاب ثابت برابر است با:

$$a = -\frac{50}{24} = -2/08 \frac{m}{s^2}$$

حال می‌توان معادلهٔ سرعت-زمان را نوشت:

$$v = a(t - t_1) + v_1$$

$$v = -2/08(t - 5) + v_1$$

که v_1 از معادلهٔ * بدست می‌آید .

$$x = 0 \rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{400}{24}} = 4/08$$

اکنون بجای v قرار می‌دهیم ۲

$$2 = -2/08(t - 5) + 4/08 \rightarrow t = 6s$$

اگر به‌جای t قرار دهیم ۷/۹ به عدد ۲ - دست میابیم. یعنی متحرک در این لحظه با تندی ۲ متر بر ثانیه خلاف محور در حرکت است، نه با سرعت ۲ متر بر ثانیه بلکه با سرعت ۲ - متر بر ثانیه. لذا گزینهٔ ۳ نمی‌تواند صحیح باشد.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۸۸ در حرکت راست خط شتابدار با شتاب ثابت اگر علامت سرعت در بازه‌ای تغییر کند یعنی متحرک در یک لحظه بطور لحظه‌ای ساکن شده و تغییر جهت 180° داده است. این نقطه را نقطهٔ بازگشت می‌نامیم. حرکت متحرک نسبت به نقطهٔ بازگشت متقارن است. [این معادل است با تقارن نمودار مکان زمان که یک سهمی است.] و بدین‌ترتیب اگر جابجایی متحرک در یک بازه صفر باشد، یعنی متحرک در لحظهٔ میانی این بازه تغییر جهت داده است. و اندازهٔ جابجایی در دو نیمهٔ قبل و بعد این لحظه برابر است. و مسافت پیموده شده دو برابر اندازهٔ جایی در هر نیمه است. خواستهٔ مساله مسافت پیموده شده است. می‌دانیم که اگر متحرک تغییر جهت دهد مسافت پیموده شده با اندازهٔ جابجایی برابر نخواهد بود. بنابراین باید ابتدا بدانیم که آیا متحرک در این بازه تغییر جهت می‌دهد یا نه. بدین منظور

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{(12-(-4/5))}{5/5}=3\frac{m}{s^2}$$

و

$$v=at+v_1 \rightarrow 0=3t+(-4/5) \rightarrow \quad t=1/5s$$

ثانیهٔ دوم حرکت یعنی بازهٔ زمانی $[1,2]$ و چون لحظهٔ ۱/۵ در این بازه است، پس تغییر جهت روی می‌دهد.

و چون این لحظه دقیقاً در وسط این بازه است، کافیست جابجایی در بازهٔ $[1/5,2]$ را حساب کرده و دو برابر کنیم.

$$\Delta x=\frac{a(\Delta t)^2}{2}+v\Delta t=\frac{3\times 0/5^2}{2}+0=\frac{3}{8}m$$

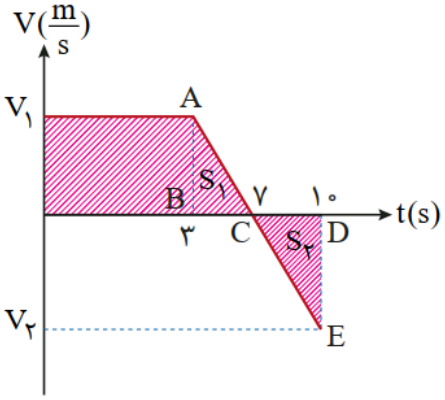
و مسافت پیموده شده دو برابر این مقدار خواهد بود.

$$L=\frac{2\times 3}{8}=\frac{3}{4}=0/75m=75cm$$

برای درک بهتر، نمودارهای سرعت - زمان و مکان - زمان و مسیر حرکت را رسم کنید. و مسافت پیموده شده را از روی نمودار مشخص کنید.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸۹ قدم اول: از روی نمودار و با توجه به تشابه مثلث‌های ABC و CDE داریم:



$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{3}{4}$$

$$S_1=\frac{7+3}{2}v_1=5v_1$$

$$S_2=\frac{3}{2}v_2=\frac{3}{2}\times\frac{3}{4}v_1=\frac{9}{8}v_1$$

قدم دوم: سرعت متوسط در ۱۰ ثانیهٔ اول $7/75\frac{m}{s}$ است:

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_1&=5v_1\\ \Delta x_2&=-\frac{9}{8}v_1\end{aligned}\right\}\rightarrow V_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow 7/75=\frac{5v_1-\frac{9}{8}}{10}$$

$$\Rightarrow 77/5=\frac{31v_1}{8}\Rightarrow v_1=20\frac{m}{s}$$

قدم سوم: حالا با جایگذاری v_1 در Δx_1 و Δx_2 تندی متوسط را محاسبه می‌کنیم:

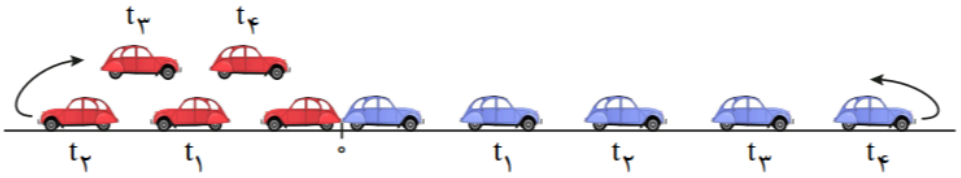
$$\left.\begin{aligned}\Delta x_1&=5\times 20=100m\\ \Delta x_2&=-\frac{9}{8}\times 20=-22/5m\end{aligned}\right\}\Rightarrow l=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=122/5m\rightarrow S_{av}=\frac{122/5}{10}=12/25\frac{m}{s}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

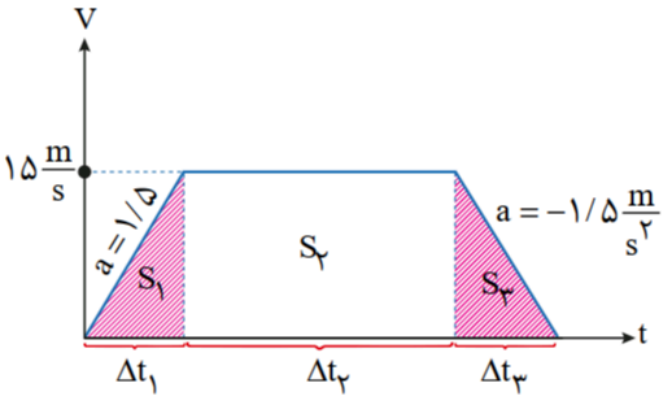
۳۹۰ مادامی‌که نمودار سرعت بالای محور t است سرعت متحرک مثبت است و متحرک در جهت محور حرکت می‌کند و هنگامی‌که نمودار زیر محور t است سرعت متحرک منفی است و متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند. تا لحظه‌ی $t_۲$ متحرک A و B در خلاف جهت هم حرکت می‌کنند پس فاصله‌ی آنها بیشتر می‌شود.

در لحظه‌ی $t_۲$ متحرک B تغییر جهت می‌دهد و هم‌جهت با A حرکت می‌کند ولی از لحظه‌ی $t_۲$ تا $t_۳$ سرعت B کمتر از A است (نمودار B زیر A است) همچنان فاصله‌ی A و B بیشتر می‌شود از آن به بعد فاصله‌ی آنها کمتر می‌شود.



(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۱



$\Delta t_۱ = \Delta t_۲ = ۱۰s$

$S_۱ = S_۳ = ۷۵m$

با توجه به سطح زیر تندشونده و کندشونده که مجموعاً برابر ۱۵۰m می‌شود، مساحت زیر سرعت ثابت $(S_۲)$ برابر $۴۵۰ - ۱۵۰ = ۳۰۰m$ خواهد بود، پس بنابراین $\Delta t_۲ = ۲۰s$ و زمان کل حرکت برابر $(\overset{۱۰}{\cancel{\Delta t_۱}} + \overset{۲۰}{\cancel{\Delta t_۲}} + \overset{۱۰}{\cancel{\Delta t_۳}})$ ۴۰s است.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۲

در بازهٔ صفر تا ۲۰s داریم:

$$\begin{cases} \Delta t = ۲۰s \\ \Delta x = ۳۰۰m \\ v_۰ = ۰ \\ v = ? \end{cases} \qquad V_{av} = \frac{\Delta x}{۲۰} = ۱۵ \rightarrow \Delta x = ۳۰۰m$$

$$\Delta x = \frac{v + v_۰}{۲} \times \Delta t \rightarrow ۳۰۰ = \frac{۰ + v}{۲} \times ۲۰ \Rightarrow v_{۲۰s} = ۳۰ \frac{m}{s}$$

متحرک اول روی مکان $x_۰ = +۴۰$ بوده. بعد از ۲۰s می‌رسد به مکان $۴۰ + ۳۰۰ = \underline{۳۴۰m}$.

می‌خواهیم از مکان +۷۰۰m عبور کند. یعنی از لحظهٔ ۲۰ به بعد که سرعتش ثابت می‌شود با سرعت ثابت ادامه دهد.

$$۷۰۰ - ۳۴۰ = \underline{۳۶۰m}$$

$$\Delta x = vt \Rightarrow ۳۶۰ = ۳۰ \times t \Rightarrow t = ۱۲s$$

حواست رو جمع کن. سؤال میگه کلاً از زمان شروع حرکت تا الآن چقدر باید بگذره؟

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۹۳ از روی نمودار معادلهٔ مکان - زمان دو متحرک را مشخص می‌کنیم. زمان سبقت متحرک B از A را به دست می‌آوریم:

$$a_A=\frac{۱۲}{۲۰}=۰/۶\,m/s^۲\ ,\ a_B=\frac{۱۲}{۱۰}=۱/۲\,m/s^۲$$

$$\xrightarrow[V_{۰A}=۰\ ,\ V_{۰B}=-۱۲\,m/s]{x=\frac{۱}{۲}at^۲+V_۰t+x_۰} x_A=۰/۳t^۲+x_{۰A}\ ,\ x_B=۰/۶t^۲-۱۲t+x_{۰B}$$

$$x_{۰A}=x_{۰B}\ ,\ x_A=x_B\Rightarrow ۰/۳t^۲=۰/۶t^۲-۱۲t$$

$$\Rightarrow t^۲-۴۰t=۰\Rightarrow t=۴۰s$$

$$\begin{cases}V_A=۰/۶\times۴۰=۲۴\ m/s\\ V_B=۱/۲\times۴۰-۱۲=۳۶\ m/s\end{cases}\Rightarrow\frac{(V_e)}{(V_A)}=\frac{۳۶}{۲۴}=\frac{۳}{۲}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۴ ابتدا با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط، سرعت را در مبدأ زمان به دست می‌آوریم:

$$V_{t=۶s}=V_۰+at\xrightarrow[a=۶\,m/s^۲]{t=۶s}V_{t=۶s}=V_۰+۳۶$$

$$\frac{V_۰+V_{t=۶s}}{۲}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$\xrightarrow[\Delta t=۶s\ ,\ V_{t=۶s}=V_۰+۳۶]{\Delta x=۳۶m}\frac{۲V_۰+۳۶}{۲}=\frac{۳۶}{۶}\Rightarrow ۲V_۰=-۲۴\Rightarrow V_۰=-۱۲\frac{m}{s}$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ مستقل زمان، تندی متحرک را در مکان $x=۱۴۴m$ به دست می‌آوریم:

$$V^۲-V_۰^۲=۲a\Delta x'\xrightarrow[a=۶\frac{m}{s^۲}\ ,\ \Delta x'=۱۴۴-(-۳۶)=۱۸۰m]{V_۰=-۱۲m/s}V^۲=۲\times۶\times۱۸۰+(-۱۲)^۲=۲۳۰۴\Rightarrow V=۴۸\frac{m}{s}$$

$$\frac{|V|}{|V_۰|}=\frac{۴۸}{۱۲}=۴$$

راه دوم: با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان در حرکت شتاب ثابت نیز می‌توانیم سرعت اولیهٔ متحرک را به دست می‌آوریم:

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+V_۰t+x_۰\xrightarrow[a=۶\,m/s^۲\ ,\ t=۶s]{x_۰=-۳۶m\ ,\ x=۰}۰=\frac{۱}{۲}\times۶\times۶^۲+۶V_۰-۳۶\Rightarrow V_۰=-۱۲\,m/s$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۵ با فرض اینکه موتور دچار نقص نمی‌شد:

$$a=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{\Delta V}{T}\Rightarrow aT=\Delta V\ (۱)$$

با فرض اینکه موتور دچار نقص شود:

$$(\Delta V)'=(\Delta V)_۱+(\Delta V)_۲=a.\frac{T}{۴}+\frac{a}{۲}\times\frac{۳T}{۴}=\frac{۵}{۸}aT\ (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow(\Delta V)'=\frac{۵}{۸}\Delta V=۶۲/۵\%$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۳۹۶ شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر با سرعت است. باتوجه به نمودار جهت سرعت متوسط و شتاب، متوسط را در بازهٔ زمانی مشخص می‌کنیم، دقت کنید با توجه با رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta V}{\Delta t}$ و $V_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$، شتاب متوسط و سرعت متوسط به ترتیب با بردار تغییرات سرعت و جابجایی هم‌جهت‌اند.

$$۲\text{s تا }۱\text{s} \Rightarrow \begin{cases} v_{۱s}>۰ \\ v_{۲/۵s}<۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta v_{۱s-۲/۵s}<۰ \Rightarrow a_{av}<۰$$
$$\begin{cases} x_{۱s}=۰ \\ x_{۲/۵s}>۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta x>۰ \Rightarrow v_{av}>۰$$

$$۷\text{s تا }۲\text{s} \Rightarrow \begin{cases} v_{۲s}=۰ \\ v_{۷s}>۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta v_{۲s-۷s}>۰ \Rightarrow a_{av}>۰$$
$$\begin{cases} x_{۲s}>۰ \\ x_{۷s}=۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta x_{۲s-۷s}<۰ \Rightarrow v_{av}<۰$$

$$۴\text{s تا }۱\text{s} \Rightarrow \begin{cases} v_{۱s}>۰ \\ v_{۴s}<۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta v_{۱s-۴s}<۰ \Rightarrow a_{av}<۰$$
$$\begin{cases} x_{۱s}=۰ \\ x_{۴s}<۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta x_{۱s-۴s}<۰ \Rightarrow v_{av}<۰$$

$$۶\text{s تا }۳\text{s} \Rightarrow \begin{cases} v_{۳s}<۰ \\ v_{۶s}>۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta v_{۳s-۶s}>۰ \Rightarrow a_{av}>۰$$
$$\begin{cases} x_{۳s}=۰ \\ x_{۶s}<۰ \end{cases} \Rightarrow \Delta x_{۳s-۶s}<۰ \Rightarrow v_{av}<۰$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹۷ از روی نمودار و با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{v_۱+v_۲}{۲} \xrightarrow[v_۲=v_۰+۱۰a\ ,\ \Delta t=۴s]{v_۱=v_۰+۶a\ ,\ \Delta x=۲۴m} \frac{۲۴}{۴}=\frac{۲v_۰+۱۶a}{۲}$$
$$\Rightarrow v_۰+۸a=۳ \xrightarrow{v_۸=v_۰+۸a} v_۸=۶\,m/s$$

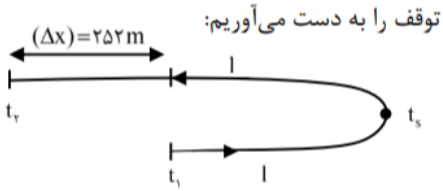
در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متوسط بین دو لحظه، برابر سرعت لحظهٔ وسط آن بازه است. پس:

$$v_۸=v_{av}\ (۶-۱۰) \Rightarrow v_۸=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۲۴}{۴}=۶$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۳۹۸ چون مسافت از اندازهٔ جابجایی بزرگتر است بنابراین متحرک تغییر جهت داده است.

می‌توانیم مسیر حرکت متحرک را مطابق شکل زیر در نظر بگیریم، جابجایی متحرک از لحظهٔ $t_۱$ تا لحظهٔ توقف را به دست می‌آوریم:



$$۲l+۲۵۲=۳۴۸ \Rightarrow ۲L=۹۶ \Rightarrow L=۴۸\,m$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ مستقل از زمان در دو بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۵$ و $t_۵$ تا $t_۲$ داریم:

$$\begin{cases} v_۱^۲=۲al \\ v_۲^۲=۲a\,(l+۲۵۲) \end{cases} \xrightarrow{l=۴۸m} \frac{v_۱^۲}{v_۲^۲}=\frac{۴۸}{۳۰۰}$$
$$\Rightarrow \frac{v_۱^۲}{v_۲^۲}=\frac{۴}{۲۵} \Rightarrow \frac{v_۱}{v_۲}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow v_۲=\frac{۵}{۲}v_۱$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۳۹۹ زمان توقف خودروها از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$t_{stop}=T_{\text{واکنش}}+\frac{v_0}{a}\Rightarrow\begin{cases}t_A=0/5+\frac{16}{4}=4/5\,s\\ t_B=0/5+\frac{20}{5}=4/8\,s\end{cases}$$

پس خودروی A زودتر می‌ایستد.

$$v_B=at+v_0=-5(4/5-0/8)+20=1/5\,m/s$$

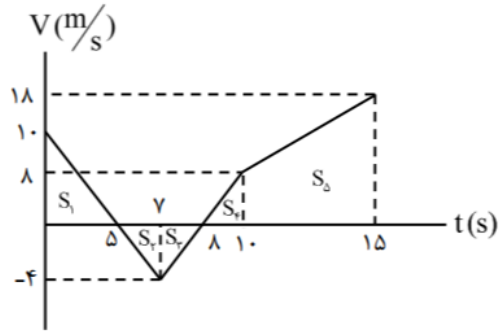
توجه: وقتی‌که $4/5\,s$ از دیدن مانع توسط راننده‌ها گذشته است خودروی B به مدت $0/8$ ثانیه با تندی ثابت و به مدت $3/7\,s$ با شتاب ثابت حرکت می‌کند.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۰۰ ابتدا شتاب هر قسمت را با استفاده از $F=ma$ به دست می‌آوریم.

$$a_1=\frac{F_1}{m}=\frac{-4}{2}=-2\,m/s^2$$
$$a_2=\frac{F_2}{m}=\frac{8}{2}=4\,m/s^2$$
$$a_3=\frac{F_3}{m}=\frac{4}{2}=2\,m/s^2$$

حالا نمودار سرعت - زمان را به صورت گام به گام رسم می‌کنیم. (برای اینکه متوجه شوید نمودار سرعت - زمان چگونه رسم می‌شود حتماً تحلیل ویدئویی را ببینید.)



$$\Delta x=S_1-S_2-S_3+S_4+S_5=25-4-2+8+65=92$$

حالا سرعت متوسط را حساب می‌کنیم:

$$V_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{92}{15}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۰۱ خط مماس بر نمودار مکان - زمان سرعت متحرک را در لحظه‌ای که مماس رسم شده است نشان می‌دهد. از این رو سرعت لحظه $t_2=4s$ برابر است با:

$$v_{t=4}=\text{شیب مماس}=\frac{0-20}{10-0}=-2\,m/s$$

باتوجه به این که سرعت متحرک از لحظه $t=0$ تا لحظه $t=4s$ از مقداری مثبت کاهش یافته (شیب خط مماس کاهش یافته) و به مقداری منفی رسیده است، شتاب متحرک منفی است و برای بازهٔ صفر تا $4\,s$ داریم:

$$a_{av}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}\rightarrow -5=\frac{-2-v_0}{4-0}\rightarrow v_0=18\,m/s$$

$$-2=\frac{0-x_1}{10-4}\rightarrow x_1=12\,m\quad(\text{مکان لحظه }4s)$$
$$v_{av}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\rightarrow v_{av}=\frac{12-(-8)}{4-0}=5\,m/s$$

حالا خواستهٔ طراح را حساب می‌کنیم:

$$v_0-v_{av}=18-5=13\,m/s$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۰۲ با توجه به رابطه $x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0$ شتاب متحرک برابر با $+10\frac{m}{s^2}$ است و برای جابه‌جایی Δx داریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v'_0t$$

$$0-(-120)=\frac{1}{2}\times10\times2^2+v'_0\times2\rightarrow v'_0=50\frac{m}{s}$$

این سرعتِ مکان $x=-120m$ است از طرفی با توجه به معادلهٔ حرکت، v_0 سرعت اولیه در مکان $-65m$ است. داریم:

$$\begin{vmatrix}x_1=120m\\v_1=50\frac{m}{s}\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}x_2=-65\\|v_2|=v_0\end{vmatrix}$$

$$v^2-v_0^2=2a\Delta x$$

$$v_2^2-50^2=2\times10(-65+120)\rightarrow v_2^2-2500=1100\rightarrow\begin{vmatrix}v_2=+60\frac{m}{s}\ \text{غ ق}\\v_2=-60\frac{m}{s}\ \text{ق ق}\end{vmatrix}$$

چنان‌چه سرعت اولیه $+60\frac{m}{s}$ باشد با توجه به اینکه شتاب هم مثبت است دیگر متحرک از مکان $120m-$ عبور نمی‌کند بلکه از همان مکان اولیه $-65m$ به طور تند شونده به طرف راست (در جهت محور x) حرکت می‌کند.

به این خاطر باید سرعت اولیه را $-60\frac{m}{s}$ بپذیریم تا متحرک ابتدا از مکان ۶۵- به طور کند شونده به طرف چپ (خلاف محور x) حرکت کند تا از مکان $120m-$ عبور کند و در مکان دورتر ($x=-240m$ مکان توقف لحظه‌ای که آن را محاسبه نکردیم) به طور لحظه‌ای بایستد و سپس تند شونده به طرف راست به حرکت در آید (چون شتاب مثبت است) و سپس برگردد و دوباره از مکان $120m-$ به طرف راست عبور نماید.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۰۳ سرعت اولیهٔ متحرک یعنی v_1 موجود است $\left(v_1 = 8\frac{m}{s}\right)$. با نوشتن معادله مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متحرک در عبور از مکان $x = 6m$ را به دست می‌آوریم:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a_1\Delta x_1 \xrightarrow[\Delta x_1 = 6-0 = 6(m)]{v_1 = 8\left(\frac{m}{s}\right), a_1 = -5\left(\frac{m}{s^2}\right) \rightarrow \text{از نمودار}} v_2^2 - (8)^2 = 2(-5)(6)$$

$$\rightarrow v_2^2 = 4 \rightarrow v_2 = 2\left(\frac{m}{s}\right)$$

به طور مشابه، برای به دست آوردن سرعت متحرک در عبور از $x = 16m$ (v_3)، از معادله مستقل از زمان استفاده می‌کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$v_3^2 - v_2^2 = 2a_2\Delta x_2 \xrightarrow[\Delta x_2 = 16-6 = 10(m)]{v_2 = 2\left(\frac{m}{s}\right), a_2 = 7\left(\frac{m}{s^2}\right) \rightarrow \text{از نمودار}} v_3^2 - (2)^2 = 2(7)(10)$$

$$\rightarrow v_3^2 = 144 \rightarrow v_3 = 12\left(\frac{m}{s}\right)$$

با استفاده از تعریف شتاب در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \Delta t = \frac{\Delta v}{a} \begin{cases} \Delta t_1 = \frac{\Delta v_1}{a_1} = \frac{2-8}{-5} = \frac{6}{5}(s) \\ \Delta t_2 = \frac{\Delta v_2}{a_a} = \frac{12-2}{7} = \frac{10}{7}(s) \end{cases}$$

با استفاده مجدد از تعریف شتاب متوسط، داریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{12-4}{\frac{6}{5}+\frac{10}{7}} = \frac{4}{\frac{42+50}{35}} = \frac{4\times 35}{92} \rightarrow a_{av} = \frac{35}{23}\left(\frac{m}{s^2}\right)$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۰۴ مجموع مسافت ترمز هر یک از دو اتومبیل حداکثر باید برابر ۲۰۰ متر باشد تا دو اتومبیل به یکدیگر برخورد نکنند. پس: $\ell_A + \ell_B = 200m$

مسافت ترمز از رابطهٔ $\ell = \frac{v_0^2}{2|a|}$ به‌دست می‌آید. پس:

$$\frac{v_{0A}^2}{2|a_A|} + \frac{v_{0B}^2}{2|a_B|} = 200 \xrightarrow[|V_{0B}| = 36\div 3/6 = 10\frac{m}{s}]{V_{0A} = 72\div 3/6 = 20\frac{m}{s}, |a_A| = |a_B| = a} \frac{20^2}{2|a|} + \frac{10^2}{2|a|} = 200$$

$$\rightarrow \frac{500}{2|a|} = 2m \Rightarrow |a| = \frac{5}{4}\frac{m}{s^2} = 1/25\frac{m}{s^2}$$

بنابراین اختلاف پتانسیل دو سر مولد مطابق رابطهٔ $V = \varepsilon - rI$ افزایش می‌یابد و جریان عبوری از مقاومت ۱۵ اُهمی افزایش می‌یابد.

$$I_{کل} = I_{15\Omega} + I_{4\Omega} \xrightarrow[I_{15\Omega} = \frac{V}{15}, V\uparrow]{I_{کل}\downarrow} I_{4\Omega}\downarrow \Rightarrow P_{4\Omega}\downarrow$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۰۵ اگر فرض کنیم جهت حرکت در لحظهٔ t' تغییر کرده است، بنابراین با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان بین دو لحظهٔ ۰ تا t' و t' تا ۱۰s داریم:

$$\begin{cases} -۱۸ = \frac{-۱}{۲}at'^{۲} \\ -۹۸ = \frac{۱}{۲}a(۱۰-t')^{۲} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۸}{۹۸} = \left(\frac{t'}{۱۰-t'}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۷} = \frac{t'}{۱۰-t'} \Rightarrow t' = ۳s$$

اکنون شتاب حرکت متحرک را به دست می‌آوریم:

$$۱۸ = \frac{-۱}{۲}a \times ۳^{۲} \Rightarrow a = -۴\frac{m}{s^{۲}}$$

بنابراین تندی متحرک در لحظهٔ $t = ۲۰s$ برابر است با:

$$v = a(۲۰-۳) \Rightarrow v = -۶۸\frac{m}{s}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰۶ زمان حرکت قسمت‌های AB و BC را $\frac{t}{۲}$ در نظر می‌گیریم. برای فاصله‌های AC و BC معادله جابجایی - زمان را می‌نویسیم

$$\begin{cases} v = at + v_{۰} \\ \Delta x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{۰}t \end{cases} \xrightarrow[\text{بالا در معادله پایین}]{\text{با قرار داد } V_{۰} \text{ از معادله}} \Delta x = -\frac{۱}{۲}at^{۲} + vt$$

$$\begin{cases} ۱۲۵۰ + \Delta x_{BC} = -\frac{۱}{۲}at^{۲} + ۰ \times t & \text{برای فاصله AC:} \\ \Delta x_{BC} = \frac{-۱}{۲}a(\frac{t}{۲})^{۲} & \text{برای فاصله BC:} \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۲۵۰ + \Delta x_{BC}}{\Delta x_{BC}} = ۴ \rightarrow \Delta X_{BC} = \frac{۱۲۵۰}{۳}m$$

معادلهٔ مستقل از زمان را برای فاصله AC می‌نویسیم:

$$\Delta X_{AC} = ۱۲۵۰ + \frac{۱۲۵۰}{۳} = \frac{۴}{۳} \times ۱۲۵۰$$

$$v^{۲} - v_{۰}^{۲} = ۲a\Delta x_{AC} \rightarrow ۰ - ۱۰۰^{۲} = ۲a \times \frac{۴}{۳} \times ۱۲۵۰ \rightarrow a = -۳ m/s^{۲}$$

$$|a| = ۳ m/s^{۲}$$

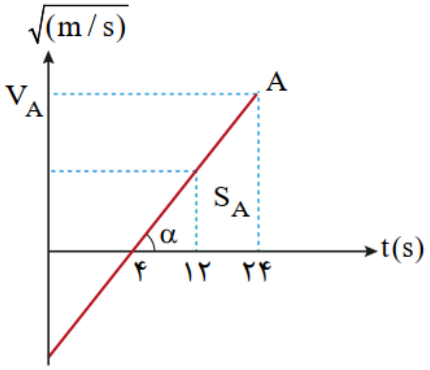
(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۰۷ می‌دانیم لحظهٔ به هم رسیدن دو متحرک، د و برابر زمان برابر شدن سرعت‌ها است، یعنی داریم:

$$t_۲ = ۲t_۱ \xrightarrow{t_۱=۱۲(s)} t_۲ = ۲\times ۱۲ = ۲۴(s)$$

در بازهٔ زمانی $[t_۱, t_۲]$ دو متحرک در حال نزدیک شدن به یکدیگر هستند. با توجه به نمودار داریم:

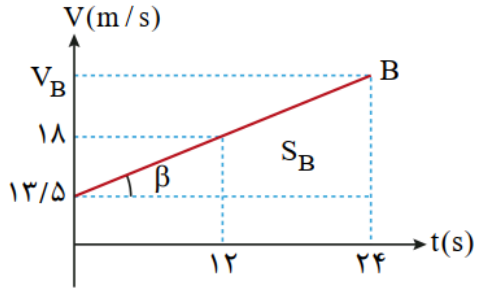


$$\tan\alpha = \frac{۱۸}{۸} = \frac{v_A}{۲۰} \rightarrow v_A = \frac{۱۸\times ۲۰}{۸} = ۴۵\left(\frac{m}{s}\right)$$

مسافت طی شده برابر سطح زیر نمودار سرعت-زمان است، داریم:

$$l_A = S_A = \left(\frac{۴۵+۱۸}{۲}\right)\times ۱۲ = ۳۷۸(m)$$

به طور مشابه، برای متحرک B نیز داریم:



$$\tan\beta = \frac{۴/۵}{۱۲} = \frac{(v_B - ۱۳/۵)}{۲۴} \Rightarrow v_B = ۲۲/۵\left(\frac{m}{s}\right)$$

مجدداً، مسافت طی شده توسط متحرک B برابر سطح زیر نمودار (S_B) است، پس:

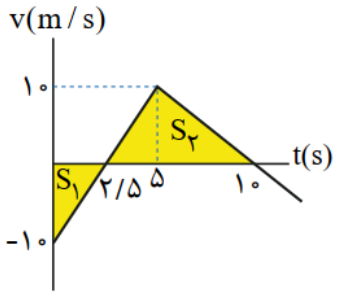
$$l_B = S_B = \left(\frac{۱۸+۲۲/۵}{۲}\right)\times ۱۲ \rightarrow l_B = ۲۴۳(m)$$

مجموع مسافت‌ها خواسته شده، پس خواهیم داشت:

$$l_A + l_B = ۳۷۸ + ۲۴۳ = ۶۲۱(m)$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۰۸ ابتدا نمودار سرعت - زمان متحرک را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار متحرک در $t = ۱۰s$ در مکان $x = ۴۵m$ قرار دارد. زیرا:

$$\Delta x_{(۰,۱۰s)} = S_۱ + S_۲ = -۱۲/۵ + ۳۷/۵ = ۲۵ \Rightarrow x_{۱۰s} - x_۰ = ۲۵ \xrightarrow{x=۲۰m} x_{۱۰s} = ۴۵m$$

در این لحظه، تندی متحرک برابر صفر است.

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۰۹ کمترین تندی متوسط حرکت متحرک (در حرکت با شتاب ثابت)، از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

$$S_{av_{min}} = \frac{۱}{۴}a\Delta t$$

با جایگذاری مقادیر داده شده، خواهیم داشت:

$$\xrightarrow[\Delta t=۱(s)]{S_{av_{min}}=۲/۵\left(\frac{m}{s}\right)} ۲/۵ = \frac{۱}{۴}\times a\times ۱ \Rightarrow |a| = ۱۰\left(\frac{m}{s^۲}\right) \xrightarrow[\text{پس: } a<۰]{\text{تقعر منحنی رو به پایین است}} a = -۱۰\left(\frac{m}{s^۲}\right)$$

با استفاده از معادله مکان-زمان در حرکت شتاب ثابت داریم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$$

$$\xrightarrow{a=-۱۰\left(\frac{m}{s^۲}\right)} x = -۵t^۲ + v_۰t + x_۰$$

به کمک نمودار، مکان متحرک در $t = ۲(s)$ و $t = ۸(s)$ به ترتیب برابر ۰ و ۱۲۰ متر است. پس:

$$\begin{cases} t = ۲(s), x = ۰ \\ t = ۸(s), x = ۱۲۰(m) \end{cases} \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}} \begin{cases} ۰ = -۳۲۰ + ۸v_۰ + x_۰ \\ ۱۲۰ = -۲۰ + ۲v_۰ + x_۰ \end{cases}$$

حل دستگاه معادلات فوق، نتیجه می‌دهد که:

$$v_۰ = ۳۰\left(\frac{m}{s}\right), x_۰ = ۸۰(m)$$

از معادله مستقیم از زمان خواهیم داشت:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \xrightarrow[a=-۱۰\frac{m}{s^۲}, \Delta x = ۱۰۵-۸۰]{v_۰=۳۰\frac{m}{s}}$$

$$v^۲ - ۹۰۰ = ۲(-۱۰)(۱۰۵-۸۰) \rightarrow v^۲ = ۴۰۰ \rightarrow |v| = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰\left(\frac{m}{s}\right)$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۱۰ چون $a > ۰$ و $V_۰ > ۰$ است بنابراین حرکت متحرک پیوسته تند شونده است. جابه‌جایی در بازه‌های زمانی متوالی و هم اندازه تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت $aT^۲$ را می‌دهد.

$$\Delta x_n = \Delta x_۱ + (n-۱)aT^۲ \xrightarrow[T=۳S]{n=۴} \Delta x_۴ = \Delta x_۱ + ۳\times a\times ۳^۲$$

$$\xrightarrow{\Delta x_۴ - \Delta x_۱ = ۷۲m} a = \frac{۷۲}{۲۷} = \frac{۸}{۳}\frac{m}{s^۲}$$

اکنون با نوشتن معادلهٔ مکان - زمان در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک را در لحظه $t = ۹s$ به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + V_۰t + x_۰ \xrightarrow[V_۰=۵\frac{m}{s}]{x_۰=-۳۰m,\ a<\frac{۸}{۳}\frac{m}{s^۲}}$$

$$x = \frac{۴}{۳}t^۲ + ۵t - ۳۰ \xrightarrow{t=۹s} x = \frac{۴}{۳}\times ۹^۲ + ۵\times ۹ - ۳۰$$

$$= ۱۵۳ - ۳۰ = ۱۲۳m$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۱۱ به بررسی هریک از جملات می‌پردازیم:

الف) بردار مکان هنگام عبور از مبدأ مکان تغییر جهت می‌دهد و این متحرک فقط در $t=10s$ از مبدأ عبور می‌کند، پس (الف) نادرست است.

ب) مسافت طی شده توسط متحرک برابر است با: $l=15+45+15+20=95m$

و تندی متوسط در کل حرکت برابر است با: $s_{av}=\frac{95}{25}=\frac{19}{5}=3/8 m/s$

و مورد (ب) صحیح است.

پ) در بازه زمانی $(10s-4s)$ متحرک در xهای مثبت است و خلاف جهت حرکت می‌کند، اما شیب خط مماس بر نمودار که بیانگر تندی است، بیشتر می‌شود. پس حرکت تند شونده است و (پ) نادرست است.

ت) چون سرعت در $t=17s$ مثبت و در $t=5s$ منفی است، پس $\Delta v>0$ و شتاب متوسط مثبت است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۱۲ در لحظهٔ عبور از مبدأ، بردار مکان تغییر جهت می‌دهد پس طبق صورت سؤال، این متحرک در مدت $3s$ از مبدأ مختصات به $x=-12m$ رسیده است

و سرعت آن برابر است با: $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-12-0}{3}=-4\frac{m}{s}$

و چون در $t=1s$، در مکان $x=18m$ قرار داشته پس: $x=vt+x_0 \Rightarrow 18=-4(1)+x_0 \Rightarrow x_0=22m$

پس معادله حرکت آن به شکل مقابل است: $x=-4t+22$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۱۳ **بررسی گزینه‌ها:**

۱) شتاب، تغییرات سرعت نسبت به زمان است. پس صفر بودن شتاب به معنای عدم تغییر سرعت است، نه صفر بودن سرعت.

۲) باتوجه به تعریف شتاب، برای محاسبه آن، سرعت جسم در دو زمان مختلف بررسی می‌شود. پس ممکن است سرعت در یک لحظه صفر باشد و لحظه پس از آن صفر نباشد. به این ترتیب، شتاب داریم اما سرعت در آن لحظه صفر بوده است. مانند توقف لحظه‌ای یک توپ در نقطه اوج.

۳) اگر مسیر حرکت منحنی باشد، حتی اگر اندازه سرعت ثابت باشد، جهت سرعت تغییر می‌کند و به این ترتیب حرکت شتاب‌دار است.

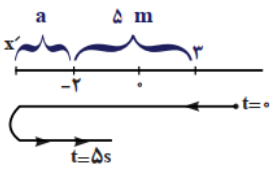
۴) بردار شتاب متحرک در جهت بردار تغییرات سرعت است و الزاماً با سرعت، هم‌جهت نیست.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۱۴ ابتدا به کمک سرعت متوسط در بازه زمانی $(5s-0)$، جابه‌جایی در این مدت را به دست می‌آوریم: $\Delta x=V_{av}\Delta t \Rightarrow \Delta x=(-1)(5)=-5m$

پس مکان جسم در لحظه $t=5s$، برابر است با: $x_5=x_0+\Delta x=3-5=-2m$

چون در این مدت، $13m$ مسافت طی کرده است، مسیر حرکت آن به صورت زیر بوده است:



$5+2a=13 \Rightarrow a=4m$ و $x'=-6m$

در ادامه به کمک شتاب متوسط در این مدت، داریم: $a=\frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow V'-V_0=(1)(5)$

چون سرعت ثانویه مثبت و سرعت اولیه منفی است، پس شتاب جسم $+1\frac{m}{s^2}$ است. این جسم تا رسیدن به $x'=-6m$ با سرعت V_0 و پس از آن با V' حرکت کرده است.

اگر لحظه تغییر جهت حرکت را t در نظر بگیریم، سرعت‌های V_0 و V' برابرند با: $V_0=\frac{-6-3}{t}, V'=\frac{-2-(-6)}{5-t}$

$$\Rightarrow 5=\frac{4}{5-t}-(-\frac{9}{t}) \Rightarrow 5=\frac{4t+45-9t}{5t-t^2} \Rightarrow 5t-t^2=9-t \Rightarrow t^2-6t+9=0 \Rightarrow t=3, V_0=-3\frac{m}{s}, V'=2\frac{m}{s}$$

به این ترتیب پس از $t=3s$، با سرعت $+2\frac{m}{s}$ حرکت می‌کند و در $t=4$ به مکان $x=-4m$ خواهد رسید.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۱۵ زمان توقف اتومبیل A برابر است با:

$$t_A = \left|-\frac{v_{0A}}{a}\right| = \frac{20}{4} = 5s$$

و در طی این مدت مسافت طی شده توسط آن برابر است با:

$$d_A = \frac{v_{0A}^2}{2a} = \frac{20^2}{2\times 4} = 50m$$

زمان توقف اتومبیل B برابر است با:

$$t_B = \left|\frac{40}{4}\right| = 10s$$

و در طی این مدت، مسافت d_B را طی می‌کند:

$$d_B = \left|\frac{v_{0B}^2}{2a}\right| = \left|\frac{40^2}{8}\right| = 200m$$

پس مجموع مسافت‌های دو جسم در حین توقف از فاصله اولیه آن‌ها بیشتر است و به این ترتیب، دو متحرک به هم برخورد می‌کنند.

برای محاسبه سرعت برخورد B به A، باید تندی آن را پس از ۱۸۲ متر جابه‌جایی بدست آوریم:

$$V_B'^2 - V_B^2 = 2a\Delta x \rightarrow V_B' - 40^2 = 2(-4)(182) \Rightarrow V_B' = 1600 - 1456 = 144 \Rightarrow V_B' = 12m/s$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۴۱۶ در بازه زمانی $t=2s$ تا $t=8s$ شتاب متحرک در جهت مثبت است و به کمک شتاب متوسط در این مدت، سرعت در $t=2s$ بدست می‌آید:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow 3 = \frac{V_8 - V_2}{8-2} \Rightarrow 18 = 10 - V_2 \Rightarrow V_2 = -8\frac{m}{s}$$

حال به کمک شیب خط مماس بر منحنی در $t=7s$، شتاب در آن لحظه را بدست می‌آوریم:

$$a' = \frac{V_2 - V_1}{7-2} \Rightarrow a = \frac{9-(-8)}{5} = \frac{17}{5} = 3/4m/s^2$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۱۷ متحرک تا لحظه $t=10s$، با شتاب a حرکت کرد و پس از آن 5s با سرعت ثابت $V_0 = (a)(10)$ حرکت کرده است. پس جابه‌جایی آن تا لحظه $t=13s$ برابر است با:

$$\Delta x_{(0-13)} = \Delta x_{(0-10)} + \Delta x_{(10-13)} = \frac{1}{2}a(10^2) + V_0(3) = 50a + (10a)(3) = 80a$$

و در این لحظه به $x=320m$ رسیده است پس:

$$320 = 80a \Rightarrow a = 4\frac{m}{s^2}$$

و اگر شتاب جسم در حین ترمز a' باشد، جابه‌جایی آن تا $t=18s$ برابر است با:

$$\Delta x' = \Delta x_{(0-10)} + \Delta x_{(10-15)} + \Delta x_{(15-18)}$$

$$\Delta x_{(0-10)} = \frac{1}{2}(4)(10^2) = 200m$$

$$\Delta x_{(10-15)} = V_0(5) = 10(4)(5) = 200m$$

$$\Delta x_{(15-18)} = \frac{1}{2}a'(3)^2 + 40(3) = 120 + \frac{9}{2}a$$

و پس از این زمان در $x=484m$ قرار گرفته است پس:

$$484 = 400 + 120 + 4/5a \Rightarrow 4/5a = -36 = a = -8\frac{m}{s^2}$$

چون سرعت حرکت آن در مدت حرکت با سرعت ثابت $40\frac{m}{s}$ است،

در حین ترمز مسافت L را طی می‌کند که برابر است با:

$$V^2 - V_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 0 - 40^2 = 2(-8)(L) = L = 100m$$

و زمان توقف آن برابر است با:

$$T = \left|\frac{V_0}{a}\right| = \left|\frac{40}{8}\right| = 5s$$

به این ترتیب کل مسافت طی شده برابر است با:

$$L = 200 + 200 + 100 = 500m$$

و کل زمان حرکت برابر است با:

$$T = 10 + 5 + 5 = 20s$$

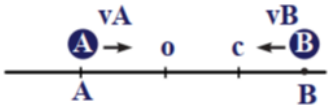
و تندی متوسط برابر است با:

$$S_{av} = \frac{500}{20} = 25\frac{m}{s}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۱۸ مسیر حرکت دو متحرک به شکل مقابل است:



و طبق نمودار، در ۶s به هم رسیده‌اند. فرض کنید محل به هم رسیدن، نقطه C باشد. متحرک A در لحظه t به محل اولیه B و متحرک B در t+۵ به محل اولیه A رسیده است. به این ترتیب می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$\text{برای جسم A}: AC = v_A \times ۶ \,,\; BC = v_A(t-۶)$$

$$\text{برای جسم B}: AC = v_B(t+۵-۶) \,,\; BC = v_B(۶)$$

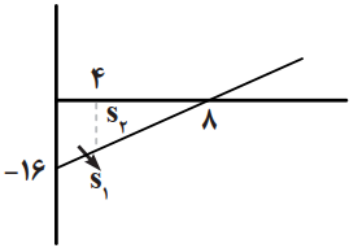
$$\Rightarrow \frac{v_A(۶)}{v_A(t-۶)} = \frac{v_B(t-۱)}{v_B(۶)} \Rightarrow \frac{۶}{t-۶} = \frac{t-۱}{۶} \Rightarrow (t-۶)(t-۱) = ۳۶ \Rightarrow t = ۱۰s$$

به این ترتیب:

$$v_A(۶) = v_B(۹) \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \frac{۹}{۶} = ۱/۵$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۴۱۹ از روی نمودار سرعت زمان B، جابه‌جایی آن را تا t = ۴s و t = ۸s بدست می‌آوریم:



تا ثانیه ۸، جابه‌جایی آن برابر است با: $S_۱ = \frac{۱۶ \times ۸}{۲} = ۶۴m$

پس مکان B در t = ۸s برابر است با: $x_{B۸} = ۲۰ - ۶۴ = -۴۴m$

و جابه‌جایی آن تا t = ۴s برابر است با: $S_۲ = \frac{۱}{۴}S_۱ = ۱۶ \,,\; \Delta x = S_۱ - S_۲$

$$\Delta x_{(۰-۴)} = ۶۴ - ۱۶ = ۴۸m \Rightarrow x_{B_۴} = ۲۰ - ۴۸ = -۲۸m$$

سرعت دو متحرک در t = ۲s یکسان است. شتاب B برابر است با:

$$a_B = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱۶}{۸} = ۲ \rightarrow v_B = ۲t - ۱۶$$

و سرعت B در این لحظه برابر است با:

$$v_{B(۲s)} = ۲(۲) - ۱۶ = -۱۲\frac{m}{s}$$

سرعت A، در مدت ۲s از $v_۰ = -۲۴\frac{m}{s}$ به $v_۲ = -۱۲\frac{m}{s}$ رسیده است و شتاب آن برابر است با:

$$a_A = \frac{-۱۲ - (-۲۴)}{۲} = ۶\frac{m}{s^۲}$$

معادله حرکت A را نوشته و مکان آن را در t = ۴s و t = ۸s بدست می‌آوریم:

$$x_A = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \Rightarrow x_A = \frac{۱}{۲}(۶)(t^۲) - ۲۴t + ۰$$

$$t = ۴s \rightarrow x_{A_۴} = ۳(۴)^۲ - ۲۴(۴) = ۴۸ - ۹۶ = -۴۸m$$

$$t = ۸s \rightarrow x_{A_۸} = ۳(۸)^۲ - ۲۴(۸) = ۱۹۲ - ۱۹۲ = ۰$$

حال فاصله آن‌ها در ثانیه‌های ۴ و ۸ را بدست می‌آوریم:

۱) $t = ۴s \,,\; x_B - x_A = -۲۸ - (-۴۸) = ۲۰m$

۲) و در $t = ۸s$: $x_B - x_A = -۴۴ - ۰ = -۴۴$

پس B، ۲۰ متر از A جلوتر است.

و B، به اندازه ۴۴m عقب‌تر است.

پس فاصله آن‌ها ۲۰m بود و به ۴۴m رسیده. پس گزینه ۳ صحیح است.

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

SanjeshCloud
www.SanjeshCloud.ir

۴۲۰ سرعت متحرک در $t=۴s$ صفر شده است و می‌توانیم براساس تکنیک برعکس کردن، جابه‌جایی از $(۰-۴s)$ را به صورت مقابل بنویسیم:

$$\Delta x_۱=\frac{۱}{۲}|a|(۴)^۲=۸|a|$$

جابه‌جایی از لحظه $t=۴s$ تا t' را نیز براساس سرعت متوسط در این بازه و مدت زمان حرکت داریم:

$$\Delta x_۲=(\frac{V_۲+V_۱}{۲})(\Delta t)=(\frac{-۳۲+۰}{۲})(t'-۴)\ ,\ t'-۴=T$$

$$\Rightarrow \Delta x_۲=-۱۶T$$

در این مدت، جسم از $x=۴۰m$ به $x=-۵۶m$ رسیده و جابه‌جایی آن برابر $-۹۶m$ است پس:

$$۸|a|+۱۶T=-۹۶$$

از طرفی $|a|=\frac{\Delta V}{\Delta t}=\frac{-۳۲}{T}$ پس:

$$۸(\frac{-۳۲}{T})-۱۶T=-۹۶\xrightarrow{\div ۱۶}\frac{-۱۶}{T}+T=-۶\Rightarrow T^۲+۶T-۱۶=۰$$

$$\Rightarrow T=-۸s \text{ یا } T=+۲ \times$$

و به این ترتیب $|a|=+\frac{۳۲}{۸}=+۴\frac{m}{s^۲}$

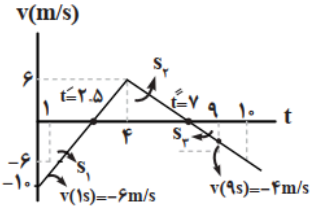
باتوجه به نمودار مکان زمان، a منفی و برابر -۴ می‌باشد.

$$x_۴=\frac{۱}{۲}\times(۴)\times(۴)^۲+۴۰=۷۲m$$

$$x_۹=\frac{۱}{۲}\times(-۳)\times(۵)^۲+۷۲=۲۲m$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۴۲۱ در گام اول، براساس سطح بین نمودار و محور زمان تا لحظه $t=۵s$، تغییر سرعت جسم را محاسبه می‌کنیم:



$$\Delta v=۴\times۴+(۱)(-۲)=۱۶-۲=۱۴\frac{m}{s}$$

به این ترتیب، سرعت اولیه جسم برابر است با:

$$v_۵-v_۰=۱۴\ ,\ v_۵=۴\Rightarrow ۴-v_۰=۱۴\Rightarrow v_۰=-۱۰\frac{m}{s}$$

حال نمودار سرعت زمان متحرک را رسم می‌کنیم:

برای محاسبه تندی متوسط از $t=۱s$ تا $t=۹s$، سطح بین نمودار $v-t$ و محور t را در این مدت محاسبه می‌کنیم:

سرعت در $t=۱s$ برابر است با:

$$v_{(۱)}=۴(۱)+(-۱۰)=-۶\frac{m}{s}$$

لحظه تقاطع نمودار با محور t، یعنی صفر شدن سرعت برابر است با: $۰=۴t'-۱۰\Rightarrow t'=۲/۵s$

در لحظه t'' سرعت برای دومین بار صفر شده است. برای اینکه سرعت از $v=۶\frac{m}{s}$ در لحظه $۴s$ به صفر برسد، $۳s$ زمان لازم است $(a'=-۲\frac{m}{s^۲})$، پس $t''=۷s$. از $t''=۷s$ تا $t=۹s$، سرعت جسم از ۰ تا $-۴\frac{m}{s}$ می‌رسد.

در پایان مساحت‌های بین نمودار و محور t را بدست می‌آوریم:

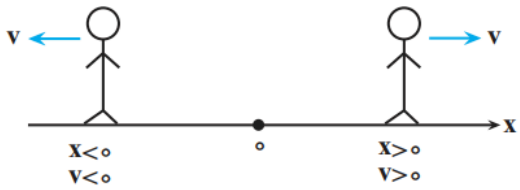
$$S_۱=\frac{۶\times۱/۵}{۲}=۴/۵m\ ,\ S_۲=\frac{۶\times۴/۵}{۲}=۱۳/۵m\ ,\ S_۳=\frac{۲\times۴}{۲}=۴m\Rightarrow L=۴/۵+۱۳/۵+۴=۲۲m$$

$$s_{av}=\frac{L}{t}=\frac{۲۲}{۸}=۲/۷۵\frac{m}{s}$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۲۲ مطابق شکل زیر هرگاه متحرک در مکان مثبت باشد و در جهت محور حرکت کند، از مبدأ مکان دور می‌شود و هرگاه در مکان منفی باشد و در خلاف جهت محور حرکت کند، دوباره از مبدأ مکان دور می‌شود. بنابراین گزینهٔ «۳» صحیح است.



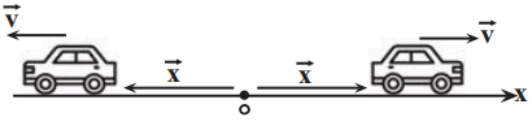
بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: اگر متحرک به‌صورت حرکت شتاب‌دار کندشونده از مبدأ مکان دور شود، بردارهای سرعت و شتاب در خلاف جهت یکدیگرند. (نادرست)

گزینهٔ «۲»: اگر متحرک به‌صورت حرکت شتاب‌دار تندشونده از مبدأ مکان دور شود، بردارهای سرعت و شتاب هم‌جهت‌اند. (نادرست)

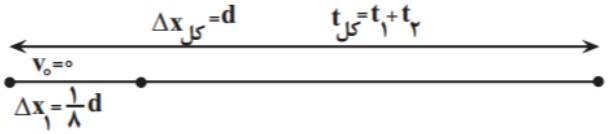
گزینهٔ «۳»: وقتی متحرک از مبدأ مکان دور می‌شود (تندشونده، کندشونده و یا با سرعت ثابت) همواره بردارهای سرعت و مکان هم‌جهت‌اند. (درست)

گزینهٔ «۴»: مطابق آن‌چه در گزینهٔ «۳» گفته شده، نادرست است.



(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۳ رابطهٔ $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ را یک‌بار برای $\frac{1}{8}$ اولیهٔ مسیر و بار دیگر، برای کل مسیر به‌کار می‌بریم و نسبت $\frac{t_2}{t_1}$ را می‌یابیم.



$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow{v_0=0} \begin{cases} \Delta x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \\ \Delta x_{کل} = \frac{1}{2}at_{کل}^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta x_1}{\Delta x_{کل}} = \frac{\frac{1}{2}at_1^2}{\frac{1}{2}at_{کل}^2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{8}d}{d} = \frac{t_1^2}{(t_1+t_2)^2} \Rightarrow \frac{1}{8} = (\frac{t_1}{t_1+t_2})^2$$

$$\xrightarrow{\text{جذرمی‌گیریم}} \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{t_1}{t_1+t_2} \Rightarrow 2\sqrt{2}t_1 = t_1 + t_2 \Rightarrow 2\sqrt{2}t_1 - t_1 = t_2 \Rightarrow (2\sqrt{2}-1)t_1 = t_2 \Rightarrow \frac{t_2}{t_1} = 2\sqrt{2} - 1$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۲۴ در ابتدا دو متحرک از هم دور می‌شوند پس از لحظه‌ای که سرعت دو متحرک با هم برابر می‌شوند، به‌هم نزدیک می‌شوند و پس از سبقت متحرک **B** از متحرک **A**، فاصلهٔ دو متحرک پیوسته زیاد می‌شود. با نوشتن معادلهٔ سرعت – زمان و مکان – زمان دو متحرک این دو لحظه را به‌دست می‌آوریم:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \xrightarrow[v_{0A}=8\frac{m}{s},v_{0B}=-16\frac{m}{s},x_{0B}=-36m]{a_A=2\frac{m}{s^2},a_B=6\frac{m}{s^2},x_{0A}=20m} \begin{cases} x_A=t^2+8t+20 \\ x_B=3t^2-16t-36 \end{cases} \xrightarrow{x_A=x_B} t^2+8t+20=3t^2-16t-36$$

$$\Rightarrow 2t^2-24t-56=0 \Rightarrow 2(t-14)(t+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-2 \text{ غ ق ق} \\ t=14s \end{cases}$$

اکنون لحظه‌ای که سرعت دو متحرک با هم برابر می‌شود را به‌دست می‌آوریم:

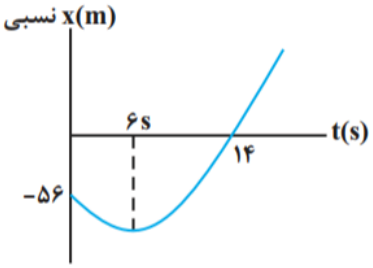
$$v=at+v_0 \begin{cases} \rightarrow v_A=2t'+8 \\ \rightarrow v_B=6t'-16 \end{cases} \xrightarrow{v_A=v_B} 2t'+8=6t'-16 \Rightarrow t'=\frac{24}{4}=6s$$

۱۵ ثانیهٔ اول حرکت در بازهٔ زمانی ۰ تا ۶s و ۱۴s تا ۱۵s، فاصلهٔ دو متحرک از هم زیاد می‌شود. بنابراین در بازهٔ زمانی ۶s تا ۱۴s فاصلهٔ دو متحرک از هم کم می‌شود.

راه دوم: اگر معادلهٔ حرکت نسبی دو متحرک را بنویسیم داریم:

$$x_{B/A}=\frac{1}{2}a_{B/A}t^2+v_{0B/A}t+x_{0B/A} \xrightarrow[x_{0B/A}=-36-20=-56m]{a_{B/A}=6-2=4\frac{m}{s^2},v_{0B/A}=-16-8=-24\frac{m}{s}} x_{B/A}=2t^2-24t-56$$

اگر نمودار حرکت دو متحرک برحسب زمان را رسم کنیم خواهیم داشت:

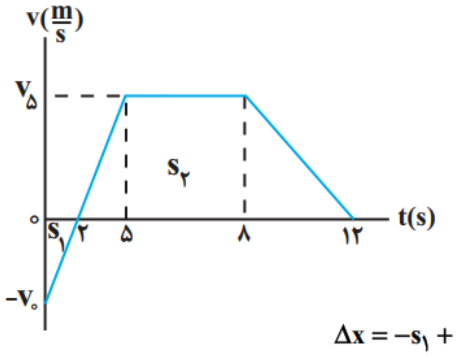


مطابق نمودار در بازهٔ زمانی ۶s تا ۱۴s فاصلهٔ دو متحرک کاهش می‌یابد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۲۵ ابتدا با استفاده از تشابه مثلث‌ها، سرعت در لحظهٔ $t=5s$ را برحسب v_0 می‌یابیم:

$$\frac{|-v_0|}{2-0}=\frac{v_5}{5-2} \Rightarrow v_5=\frac{3v_0}{2}$$



با توجه به این‌که مساحت سطح بین نمودار $v-t$ و محور t برابر جابه‌جایی متحرک است، جابه‌جایی کل متحرک را به‌دست می‌آوریم:

$$\Delta x=-s_1+s_2=\frac{-v_0\times 2}{2}+\frac{(12-2)+(8-5)}{2}\times v_5 \xrightarrow{v_5=\frac{3}{2}v_0} \Delta x=-v_0+\frac{13}{2}\times\frac{3}{2}v_0=\frac{35}{4}v_0$$

اکنون با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط، v_0 را می‌یابیم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t=12-0=12s]{v_{av}=5/25\frac{m}{s}} 5/25=\frac{\frac{35}{4}v_0}{12} \Rightarrow v_0=7/2\frac{m}{s}$$

با داشتن v_0 مسافت طی شده و به دنبال آن تندی متوسط را حساب می‌کنیم:

$$\ell=s_1+s_2=\left|\frac{-v_0\times 2}{2}\right|+\frac{13}{2}\times\frac{3}{2}v_0 \Rightarrow \ell=7/2+\frac{39}{4}\times 7/2=77/4m \qquad s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t=12s} s_{av}=\frac{77/4}{12}=6/45\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۲۶ چون هر دو متحرک از یک نقطه شروع به حرکت نموده‌اند، جابه‌جایی آن‌ها تا لحظهٔ به هم رسیدن، یکسان است. بنابراین، با توجه به این‌که حرکت متحرک **A** با سرعت ثابت و حرکت متحرک **B** شتاب‌دار تندشونده است، می‌توان نوشت:

$$\Delta x_A = \Delta x_B \Rightarrow v_A t = \frac{1}{2}a_B(t-3)^2 + v_{0B}(t-3) \xrightarrow[a_B=3\frac{m}{s^2},\ v_{0B}=5\frac{m}{s}]{v_A=72\frac{km}{h}=\frac{72}{3/6}=20\frac{m}{s}} 20t = \frac{1}{2}\times 3(t^2-6t+9)+5(t-3)$$

$$\Rightarrow 40t = 3(t^2-6t+9)+10(t-3) \Rightarrow 40t = 3t^2-18t+27+10t-30 \Rightarrow 3t^2-48t-3=0 \Rightarrow t^2-16t-1=0$$

اکنون سرعت متحرک **B** را پیدا می‌کنیم:

$$t=\frac{8\pm\sqrt{64+1}}{1} \Rightarrow t_1 = 8+\sqrt{65}, t_2 = 8-\sqrt{65} \xrightarrow{t>0} t = 8+\sqrt{65}$$

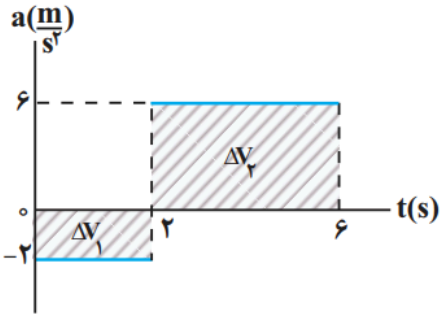
$$v_B = a_B(t-3)+v_{0B} = 3\times(8+\sqrt{65}-3)+5 = (20+3\sqrt{65})\frac{m}{s}$$

در آخر داریم:

$$v_B - v_A = 20+3\sqrt{65}-20 = 3\sqrt{65}\frac{m}{s}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲۷ می‌دانیم که مساحت سطح بین نمودار شتاب – زمان و محور زمان برابر تغییرات سرعت متحرک است. بنابراین، ابتدا با محاسبهٔ Δv در بازه‌های زمانی صفر تا $2s$ و $2s$ تا $6s$، سرعت در لحظه‌های $2s$ و $6s$ را پیدا می‌کنیم.



$$\Delta v_1 = -2\times 2 = -4\frac{m}{s}$$

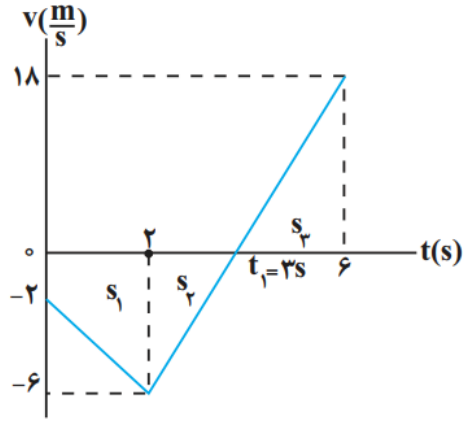
$$\Delta v_2 = 6\times(6-2) = 24\frac{m}{s}$$

$$v_{0}=-2\frac{m}{s} \xrightarrow{} v_{2s} = v_0 + \Delta v_1 = -2-4 = -6\frac{m}{s}$$

$$v_{6s} = v_{2s} + \Delta v_2 = -6+24 = 18\frac{m}{s}$$

اکنون نمودار سرعت – زمان متحرک را رسم می‌کنیم. دقت کنید، در ۲ ثانیهٔ اول شتاب ثابت و منفی و در بازهٔ زمانی $2s$ تا $6s$ شتاب ثابت و مثبت است.

با توجه به نمودارهای رسم شده، با استفاده از تشابه مثلث‌ها لحظهٔ t_1 را پیدا می‌کنیم:



$$\frac{6}{t_1-2} = \frac{18}{6-t_1} \Rightarrow 18t_1-36 = 36-6t_1 \Rightarrow 24t_1 = 72 \Rightarrow t_1 = 3s$$

در این مرحله جابه‌جایی و مسافت طی شده را با استفاده از مساحت سطح بین نمودار $v-t$ و محور t می‌یابیم:

$$\Delta x = -s_1 - s_2 + s_3 = \frac{-2+(-6)}{2}\times 2 + \frac{-6\times(3-2)}{2} + \frac{18\times(6-3)}{2} = -8-3+27 = 16m \qquad \ell = (-s_1)+(-s_2)+s_3 = 8+3+27 = 38m$$

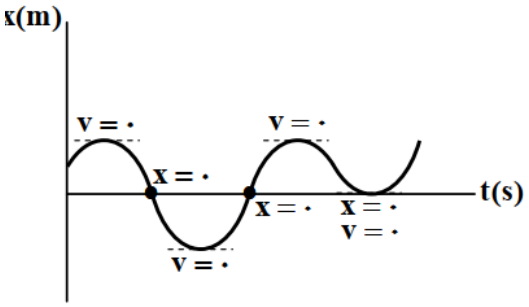
در آخر نسبت تندی متوسط به اندازهٔ سرعت متوسط را حساب می‌کنیم:

$$\frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{\frac{\ell}{\Delta t_1}}{\frac{\Delta x}{\Delta t_2}} \xrightarrow{\Delta t_1=\Delta t_2} \frac{s_{av}}{|v_{av}|} = \frac{\ell}{\Delta x} = \frac{38}{16} = \frac{19}{8}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

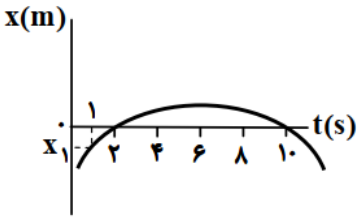
۴۲۸ با توجه به نمودار، هر لحظه که شیب خط مماس صفر شود، سرعت متحرک برابر صفر است، یعنی متوقف شده است و هر لحظه که نمودار از روی محور زمان عبور کند، متحرک به مکان $x = 0$ (مبدأ مکان) می‌رسد.



$(x = 0)$ تعداد دفعات = ۳ بار

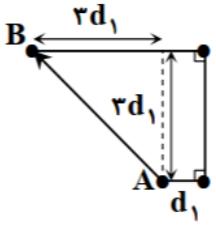
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۲۹ با توجه به نمودار در لحظهٔ $t = 1s$ مکان ذره (x_1) منفی است، بنابراین بردار مکان که مبدأ مکان را به مکان متحرک وصل می‌کند، خلاف جهت محور x است. همچنین سرعت که برابر شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان در لحظهٔ $t = 1s$ است، مثبت خواهد بود.



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۳۰ بردار جابه‌جایی نقطهٔ A را به نقطهٔ B وصل می‌کند و طبق رابطهٔ فیثاغورث اندازهٔ جابه‌جایی برابر است با:



$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(3d_1)^2 + (3d_1)^2} = 3\sqrt{2}d_1$$

$$3\sqrt{2}d_1 = 30\sqrt{2} \Rightarrow d_1 = 10\,m$$

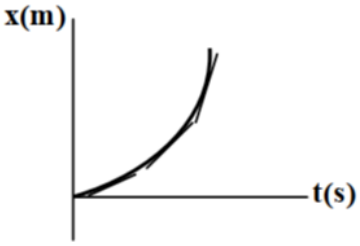
$$\text{مسافت طی شده} = d_1 + 3d_1 + 4d_1 = 8d_1 = 8 \times 10 = 80\,m$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۳۱ در نمودار گزینه‌های ۱ و ۲، با گذشت زمان نمودار به‌سمت $v = 0$ نزدیک‌تر می‌شود و این به معنی کاهش تندی متحرک است.

در نمودار گزینهٔ ۳، شیب خط مماس بر نمودار، سرعت لحظه‌ای را نشان می‌دهد (نمودار $x - t$ است) و با گذشت زمان، شیب خط مماس بر نمودار بیشتر می‌شود یعنی اندازهٔ سرعت افزایش می‌یابد.

در نمودار گزینهٔ ۴ شیب مماس بر نمودار کاهش می‌یابد یعنی اندازهٔ سرعت کاهش می‌یابد.



(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۳۲ شیب خطی که دو نقطهٔ نمودار $(x - t)$ را به هم وصل می‌کند، سرعت متوسط در همان بازهٔ زمانی است. خط‌چین، نمودار را در دو لحظهٔ ۳s و t' به هم وصل می‌کند. ازاین‌رو سرعت متوسط مربوط به بازهٔ ۳s تا t' است.

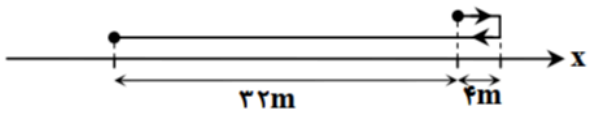
$$\text{شیب خط} = \frac{12 - 0}{3 - 1} = 6\,\frac{m}{s}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۳۳ چون حرکت بر خط راست است و اندازهٔ سرعت متوسط و تندی متوسط با هم برابر نیست، پس متحرک تغییر جهت داده و برگشته است.

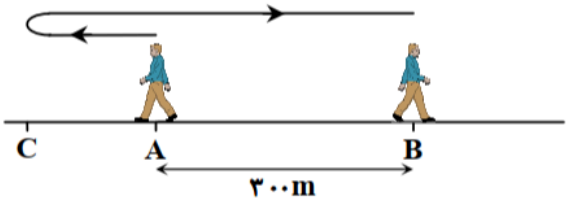
$$\left.\begin{array}{l} s_{av}=\dfrac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \ell = s_{av}\cdot\Delta t = ۱۰\times ۴ = ۴۰\,m \\ v_{av}=\dfrac{d}{\Delta t} \Rightarrow d = v_{av}\cdot\Delta t = ۸\times ۴ = ۳۲\,m \end{array}\right\} \Rightarrow$$



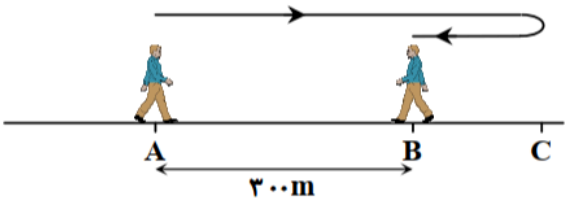
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۳۴ $s_{av}=\dfrac{\ell}{\Delta t}$ و $v_{av}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ و $s_{av}=۲|v_{av}| \Rightarrow \ell = ۲|\Delta x|$

مسافت طی‌شده ۲ برابر اندازهٔ جابه‌جایی است. با توجه به اینکه متحرک تنها یک تغییر جهت حرکت داشته است، یکی از دو اتفاق زیر رخ داده است:



$$۲AC + AB = ۲AB \Rightarrow AC = \frac{۱}{۲}AB = ۱۵۰\,m$$



$$AB + ۲BC = ۲AB \Rightarrow ۲BC = AB$$

$$\Rightarrow BC = \frac{۱}{۲}AB = ۱۵۰\,m \Rightarrow AC = ۴۵۰\,m$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۳۵ شیب خط مماس بر نمودار مکان- زمان برابر با سرعت لحظه‌ای متحرک است. در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ شیب خط مماس منفی بوده یعنی متحرک در خلاف محور x در حرکت است. از طرفی قدرمطلق این شیب در حال افزایش است (خط مماس به قائم نزدیک می‌شود)؛ یعنی تندی (اندازهٔ سرعت) متحرک زیاد می‌شود.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۳۶ چنانچه فاصلهٔ هر دو خط موازی در امتداد x را به‌عنوان ۱ واحد طول انتخاب کنیم، اندازهٔ سرعت متوسط متحرک را در هر بازهٔ زمانی محاسبه می‌کنیم. از طرفی در هر یک از بازه‌های زمانی زیر سرعت متحرک ثابت است.

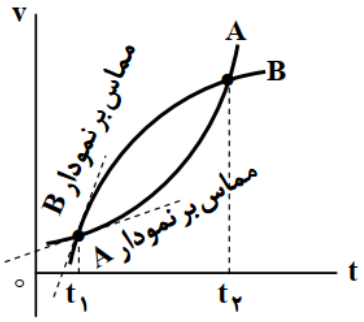
بازهٔ زمانی $(۱۰s,۲۰s)$: $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{۱}{۱۰}=۰/۱\dfrac{m}{s}$	بازهٔ زمانی $(۰,۱۰s)$: $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{۳}{۱۰}=۰/۳\dfrac{m}{s}$
بازهٔ زمانی $(۲۵s,۳۵s)$: $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{۰}{۱۰}=۰$	بازهٔ زمانی $(۲۰s,۲۵s)$: $v=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{۲}{۵}=۰/۴\dfrac{m}{s}$
	بازهٔ زمانی $(۳۵s,۴۰s)$: $\lvert v\rvert=\dfrac{\lvert\Delta x\rvert}{\Delta t}=\dfrac{۲/۵}{۵}=۰/۵\dfrac{m}{s}$

با توجه به اعداد به‌دست‌آمده اندازهٔ سرعت در بازهٔ ۳۵ تا ۴۰ ثانیه، بیشتر از سایر بازه‌های زمانی است و لحظهٔ ۳۷s در این بازه قرار دارد.

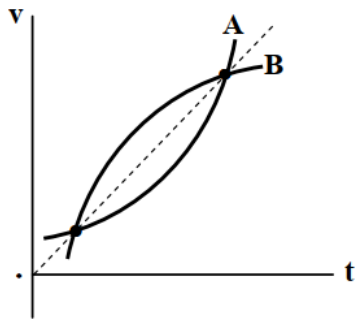
(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۳۷



شیب خط مماس بر نمودار «سرعت- زمان»، شتاب لحظه‌ای را نشان می‌دهد و با توجه به نمودار، در لحظهٔ t_1 شیب B بیشتر از شیب A است.



شیب خط قاطع بین دو لحظه در نمودار «سرعت- زمان»، شتاب متوسط را نشان می‌دهد که شیب خط قاطع برای هر دو نمودار در بازهٔ t_1 تا t_2 برابر است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۳۸ چون نمودار «$v-t$» خط راست است، شتاب متحرک در کل حرکت ثابت خواهد بود. ازاین‌رو شتاب متوسط متحرک با شتاب لحظهٔ صفر شدن سرعت برابر است.

$$a = v-t \text{ شیب خط نمودار} = \frac{۲۵-(-۱۰)}{۵-۰} = \frac{۳۵}{۵} = ۷\frac{m}{s^۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۳۹ تندی متوسط از نسبت مسافت طی‌شده به زمان محاسبه می‌شود و اندازهٔ سرعت متوسط از نسبت اندازهٔ جابه‌جایی به زمان. اگر زمان حرکت را Δt فرض کنیم، داریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{AB+BC}{\Delta t} = \frac{۶۰+BC}{\Delta t}$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{AB-BC}{\Delta t} = \frac{۶۰-BC}{\Delta t}$$

$$\frac{s_{av}}{v_{av}} = \frac{\frac{۶۰+BC}{\Delta t}}{\frac{۶۰-BC}{\Delta t}} = ۱/۵ \Rightarrow ۶۰+BC = ۹۰-۱/۵BC \Rightarrow ۲/۵BC = ۳۰ \Rightarrow BC = ۱۲m$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

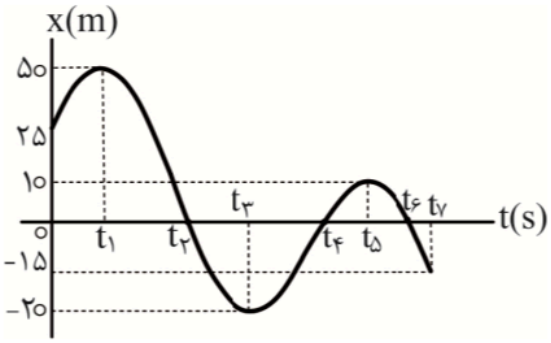
۴۴۰ هر ضلع قائم مربع‌ها را یک واحد طول و هر ضلع افقی آن‌ها را یک واحد زمان فرض می‌کنیم؛ بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} v_{t=t_1} = t_1 \text{ شیب خط مماس در لحظهٔ} = \frac{-۳}{۲} \\ v_{av(۰,t_1)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۳}{۷} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\text{اندازهٔ سرعت در لحظهٔ } t_1}{\text{اندازهٔ سرعت متوسط در بازهٔ } (۰,t_1)} = \frac{\left|-\frac{۳}{۲}\right|}{\frac{۳}{۷}} = ۳/۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۴۱ **گزینه ۲ درست است.**



متحرک در لحظه $t_۶$ برای سومین‌بار از مبدأ مکان می‌گذرد از این رو مسافت طی‌شده در بازهٔ صفر تا $t_۶$ برابر است با:

$$L=(۵۰-۲۵)+(۵۰-۰)+۲(۲۰-۰)+۲(۱۰-۰)\Rightarrow L=۱۳۵\,m$$

متحرک در لحظه $t_۳$، برای دومین‌بار سرعتش صفر می‌شود. (شیب خط، مماس افقی است.)

$$d=|x_۲-x_۱|=|-۲۰-۲۵|=۴۵\,m$$

$$L-d=۱۳۵-۴۵=۹۰\,m$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

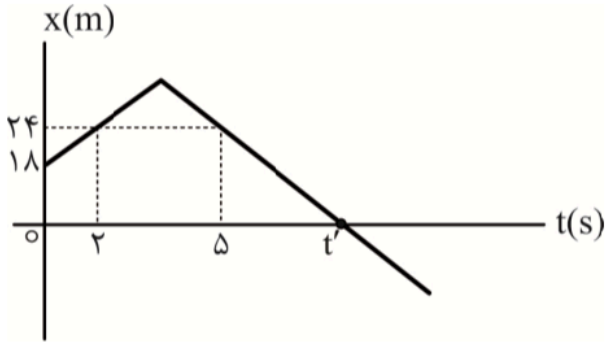
۴۴۲ **گزینه ۱ درست است.**

شیب خط مماس بر نمودار مکان - زمان برابر با سرعت متحرک است، در بازهٔ زمانی $۵s$ تا $۱۱s$ این شیب در حال افزایش است، از طرفی این شیب مثبت و بزرگی آن در هر لحظه برابر تندی متحرک است؛ به این ترتیب این بازه برابر $۶s$ است. بزرگی بردار مکان در بازهٔ زمانی صفر تا $۱s$ و بازهٔ زمانی $۵s$ تا $۸s$ یعنی به مدت $۴s$ در حال کاهش است از این رو این نسبت برابر با $\frac{۶}{۴}=\frac{۳}{۲}$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۴۳ گزینه ۴ درست است.



جهت بردار مکان در لحظهٔ t' تغییر می‌کند. قبل از آن بردار مکان در جهت محور x و بعد از آن در خلاف جهت محور x است.

$$\text{شیب خط} = v_۱ = \frac{۲۴-۱۸}{۲-۰} = ۳\frac{m}{s}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} \Rightarrow -۳ = \frac{v_۲ - ۳}{۵-۲} \rightarrow v_۲ = -۶\frac{m}{s}$$

$$\text{شیب خط} = v_۲ = -۶ = \frac{۰-۲۴}{t'-۵} \Rightarrow t' = ۹s$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۴ گزینه ۴ درست است.

الف- نادرست است. شتاب متحرک همواره منفی است؛ چون شیب خط مماس نمودار $(v-t)$ منفی است.

ب- نادرست است. بزرگی شتاب همواره در حال افزایش است؛ چون شیب خط مماس زیاد می‌شود.

ج- نادرست است؛ زیرا در لحظه‌ای که تندی متحرک صفر است (لحظه برخورد نمودار با محور زمان) شیب خط مماس صفر نیست.

د- نادرست است؛ زیرا بزرگی شیب خط واصل در بازهٔ زمانی صفر تا $t_۱$ کمتر از بزرگی شیب خط مماس در لحظه $t_۱$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۵ گزینه ۲ درست است.

$$\text{شیب خط مماس} = v_{t=۴s} = \frac{۳۶-۰}{۹-۰} = ۴\frac{m}{s}$$

$$\begin{cases} v_۱ = ۴\frac{m}{s} \\ v_۲ = -۲v_۱ = -۸\frac{m}{s} \end{cases} \rightarrow a_{av} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۸-۴}{۹-۴} = -۲/۴\frac{m}{s^۲}$$

لازم به ذکر است که شیب خط مماس در لحظهٔ $t = ۹s$ منفی است.

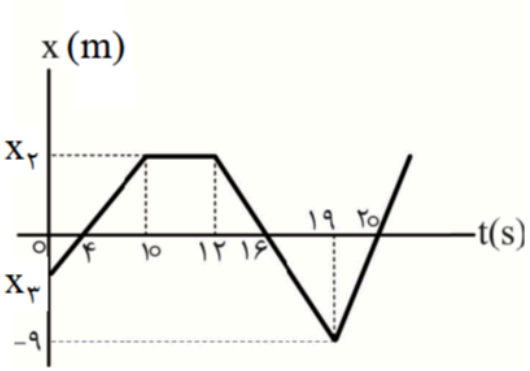
$$\text{شیب خط مماس} = ۴ = \frac{x_۱ - ۰}{۴-۰} \rightarrow x_۱ = ۱۶m$$ مکان در لحظه $۴s$

$$v_{av} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} \rightarrow v_{av} = \frac{۰-۱۶}{۹-۴} = -۳/۲\frac{m}{s}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۴۶ گزینه ۳ درست است.



$$v_{av}=\frac{x_۲-x_۱}{t_۲-t_۱}$$

در بازهٔ صفر تا ۴s $\rightarrow v_{av}=\frac{۰-(-۸)}{۴-۰}=۲\frac{m}{s}$

در بازهٔ ۴ تا ۱۰ $\rightarrow ۲=\frac{x_۲-۰}{۱۰-۴}\rightarrow x_۲=۱۲m$

در بازهٔ ۱۲ تا ۱۶ $\rightarrow v_{av}=\frac{۰-۱۲}{۱۶-۱۲}=-۳\frac{m}{s}$

در بازهٔ ۱۶ تا ۱۹ $\rightarrow -۳=\frac{x_۳-۰}{۱۹-۱۶}\rightarrow x_۳=-۹m$

در بازهٔ ۱۹ تا ۲۰ $\rightarrow v_{av}=\frac{۰-(-۹)}{۲۰-۱۹}=۹\frac{m}{s}$

لازم به ذکر است که در یک خط، شیب برای تمام نقاط آن ثابت است.

$$L=۸+۱۲+۰+۱۲+۹+۹=۵۰m$$

$$S_{av}=\frac{L}{\Delta t}=\frac{۵۰}{۲۰}=۲/۵\frac{m}{s}$$

$$a_{av}=\frac{v_۲-v_۱}{t_۲-t_۱}\rightarrow a_{av}=\frac{۹-۲}{۲۰-۰}=\frac{۷}{۲۰}=۰/۳۵\frac{m}{s^۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۴۷ گزینه ۴ درست است.

متحرک در مبدأ زمان، از مکان $x_0 = ۴۰\,m$ و با تندی $۱۲\frac{m}{s}$ و در خلاف جهت x $(v_0 = -۱۲\frac{m}{s})$ در حرکت است، پس در لحظهٔ $t = ۰$ به‌سمت مبدأ مکان حرکت می‌کند. اکنون $x = ۰$ قرار می‌دهیم تا ببینیم متحرک در چه لحظه‌ای به مبدأ مکان می‌رسد.

$$x = ۰ \rightarrow ۱/۲t^۲ - ۱۲t + ۴۰ = ۰ \rightarrow \Delta < ۰$$

این معادله ریشه ندارد، پس متحرک به مبدأ مکان نمی‌رسد، یعنی قبل از مبدأ توقف لحظه‌ای کرده و برمی‌گردد، برای این منظور معادله سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم تا لحظه تغییر جهت به‌دست آید.

$$v = ۲/۴t - ۱۲ = ۰ \rightarrow t = ۵s$$

پس متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱ = ۰$ تا $t_۲ = ۵s$ به مبدأ مکان نزدیک می‌شود.

$$t_۱ = ۰ \rightarrow x_۱ = ۱/۲(۰)^۲ - ۱۲(۰) + ۴۰ = ۴۰\,m$$

$$t_۲ = ۵ \rightarrow x_۲ = ۱/۲(۵)^۲ - ۱۲(۵) + ۴۰ = ۱۰\,m$$

$$v_{av} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} \rightarrow v_{av} = \frac{۱۰ - ۴۰}{۵ - ۰} = -۶\frac{m}{s}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴۸ گزینه ۲ درست است.

با توجه به نتیجهٔ مسابقهٔ نخست:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{d}{d - \frac{d}{۸}} = \frac{۸}{۷}$$

در مسابقهٔ دوم:

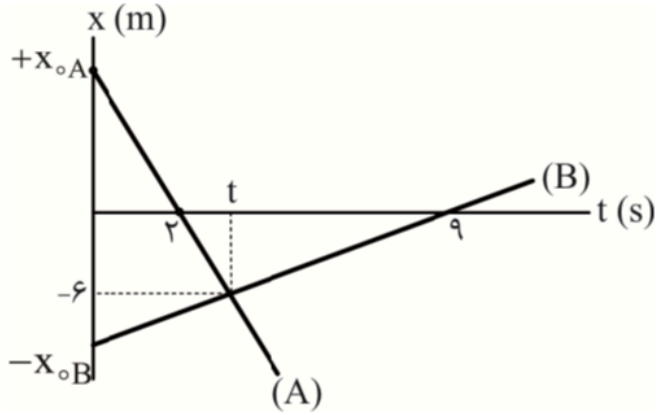
$$\Delta t_A = \Delta t_B$$

$$\frac{d + x}{v_A} = \frac{d}{v_B} \Rightarrow \frac{d + x}{d} = \frac{v_A}{v_B} \Rightarrow \frac{d + x}{d} = \frac{۸}{۷} \Rightarrow ۷d + ۷x = ۸d \Rightarrow ۷x = d \Rightarrow \boxed{\frac{x}{d} = \frac{۱}{۷}}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۴۹ **گزینه ۱ درست است.**



$$v_A = ۶|v_B| \Rightarrow \frac{x_{۰A}}{۲} = ۶(\frac{x_{۰B}}{۹}) \Rightarrow x_{۰B} = \frac{۳}{۴}x_{۰A}$$

از طرفی:

$$v_B = \frac{x_{۰B} - ۶}{t} \qquad v_A = \frac{x_{۰A} + ۶}{t}$$

$$\frac{x_{۰A} + ۶}{t} = ۶(\frac{x_{۰B} - ۶}{t}) \Rightarrow x_{۰A} + ۶ = ۶(\frac{۳}{۴}x_{۰A} - ۶)$$

$$x_{۰A} + ۶ = \frac{۹}{۲}x_{۰A} - ۳۶ \Rightarrow ۴۲ = \frac{۷}{۲}x_{۰A} \Rightarrow x_{۰A} = ۱۲\,m$$

$$x_{۰B} = \frac{۳}{۴} \times ۱۲ = ۹\,m \qquad x_{۰A} + x_{۰B} = ۹ + ۱۲ = ۲۱\,m$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۵۰ **گزینه ۱ درست است.**

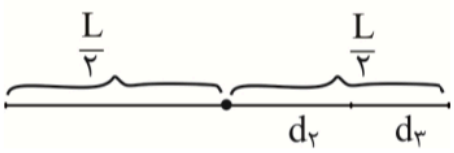
حرکت متحرک A با سرعت ثابت بر خط راست است، اما حرکت متحرک B شتاب‌دار است که ابتدا در خلاف جهت محور در حرکت بوده و پس از تغییر جهت، در سوی مثبت محور حرکت می‌کند. هر دو متحرک در لحظه $t_۱$ در مکان $x_۱$ و در لحظهٔ $t_۲$ در مکان $x_۲$ هستند؛ پس جابه‌جایی یکسانی در این بازهٔ زمانی دارند، اما مسافت طی‌شده توسط دو متحرک، متفاوت است؛ پس تندی متوسط آن‌ها نیز متفاوت است. شتاب متوسط دو متحرک نیز متفاوت است؛ زیرا همان‌طور که گفته شد متحرک A بدون شتاب در حرکت است، پس فقط عبارت الف درست است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۵۱ **گزینه ۳ درست است.**

کل مسیر حرکت را L فرض می‌کنیم. متحرک نیمی از این مسیر $(\frac{L}{۲})$ را با تندی ثابت $۲۰\frac{m}{s}$ و نیمهٔ دیگر مسیر $(\frac{L}{۲})$ را طی دو بازهٔ زمانی مساوی طی کرده است.



$$\Delta t_۲ = \Delta t_۳ \Rightarrow \frac{d_۲}{v} = \frac{d_۳}{۴v} \Rightarrow d_۳ = ۴d_۲$$

$$d_۲ + d_۳ = \frac{L}{۲} \Rightarrow ۵d_۲ = \frac{L}{۲} \Rightarrow d_۲ = \frac{L}{۱۰}\ ,\ d_۳ = \frac{۲L}{۵}$$

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta t_۱ + \Delta t_۲ + \Delta t_۳} \Rightarrow ۳۰ = \frac{L}{\frac{L}{۲}/۲۰ + \frac{L}{۱۰}/v + \frac{۲L}{۵}/۴v} \Rightarrow ۳۰ = \frac{L}{\frac{L}{۴۰} + \frac{L}{۵v}} \Rightarrow ۳۰ = \frac{۱}{\frac{۱}{۴۰} + \frac{۱}{۵v}}$$

$$\Rightarrow \frac{۳۰}{۴۰} + \frac{۶}{v} = ۱ \Rightarrow \boxed{v = ۲۴\frac{m}{s}}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵۲ **گزینه ۲ درست است.**

روش اول:

ابتدا سرعت مسافر را برحسب یکای $\frac{m}{s}$ تبدیل می‌کنیم:

$$۹\frac{km}{h} \times \frac{۱۰۰}{۳۶۰۰} = ۲/۵\frac{m}{s}$$

مدت زمانی‌که مسافر، طول قطار را طی می‌کند برابر است با:

$$\Delta x = v_۱ t \Rightarrow t = \frac{۱۰۰}{۲/۵} = ۴۰s$$

در این مدت قطار به‌اندازهٔ $\Delta x'$ جابه‌جا می‌شود:

$$\Delta x' = v_۲ t = ۲۵ \times ۴۰ = ۱۰۰۰m$$

بنابراین قطار در این مدت $۴۰s$ به‌اندازهٔ $۱۰۰۰m$ جابه‌جا شده، اما مسافر در خلاف جهت حرکت قطار به‌اندازهٔ $۱۰۰m$ جابه‌جا شده است، پس مسافر از دید ناظر درون ایستگاه به‌اندازهٔ $۱۰۰۰ - ۱۰۰ = ۹۰۰m$ جابه‌جا شده است.

روش دوم:

می‌توان گفت مسافر در مدت t با سرعت نسبی $v_۲ - v_۱$ به‌اندازهٔ Δd جابه‌جا می‌شود:

$$\Delta d = (v_۲ - v_۱)t = (۲۵ - ۲/۵) \times ۴۰ = ۹۰۰m$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

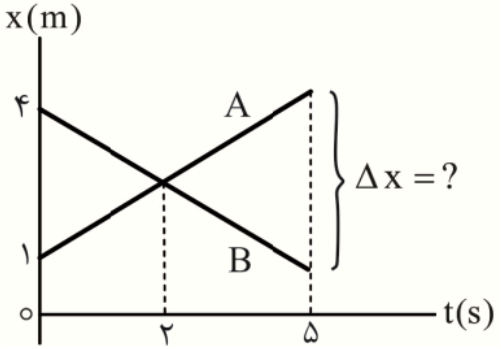
SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۵۳ روش اول:

فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر در لحظهٔ $t = ۵s$ برابر Δx است که در شکل نشان داده شده است. دو مثلث در شکل با هم متشابه‌اند؛ بنابراین می‌توان نوشت:

(نسبت قاعده‌ها ÷ نسبت ارتفاع‌ها)

$$\frac{\Delta x}{۴-۱} = \frac{۵-۲}{۲-۰} \rightarrow \boxed{\Delta x = ۴/۵\,m}$$

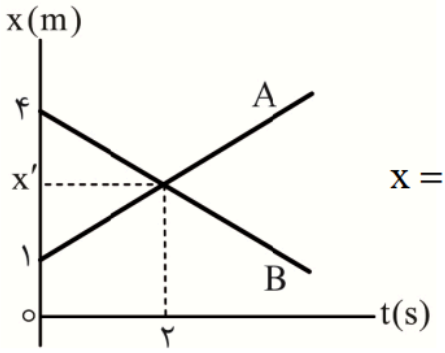


روش دوم:

ابتدا با توجه به نمودار مکان - زمان هر کدام از متحرک‌ها، حرکت آن‌ها را می‌نویسیم:

در لحظهٔ $t = ۲s$، دو متحرک به هم رسیده‌اند؛ بنابراین:

$$x = vt + x_۰ \Rightarrow x_A = v_A t + ۱ \ , \ x_B = v_B t + ۴$$



$$\begin{cases} t = ۲s \\ x_A = x_B \end{cases} \Rightarrow ۲v_A + ۱ = ۲v_B + ۴ \Rightarrow v_A - v_B = \frac{۳}{۲}$$

$$x_A - x_B = ۵ \times \frac{۳}{۲} - ۳ = ۴/۵\,m$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

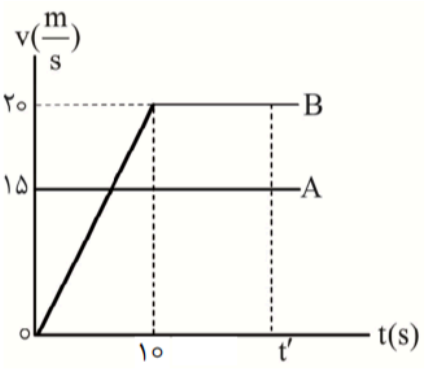
۴۵۴ **گزینه ۱ درست است.**

با توجه به نمودارها مشخص است که بزرگی سرعت هر دو متحرک در حال افزایش است، پس حرکت هر دو متحرک تندشونده است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۵۵ گزینه ۳ درست است.



با توجه به شکل، در بازهٔ زمانی صفر تا $10s$، جابه‌جایی خودروی A برابر $15\times10=150m$ و جابه‌جایی خودروی B برابر $\frac{20\times10}{2}=100m$ است. از طرفی پس از لحظهٔ $t=0$ چون خودروی A تندی بیشتری دارد، جلوتر از خودروی B است. به این ترتیب در بازهٔ زمانی صفر تا $10s$ به هم نمی‌رسند.

چون دو خودرو از یک نقطه شروع به حرکت کرده‌اند، برای به هم رسیدن مجدد، باید جابه‌جایی دو خودرو تا لحظهٔ t' یکسان باشد، یعنی باید سطح زیر نمودار $v-t$ برای این دو خودرو برابر باشد. (سطح زیر نمودار B یک ذوزنقه و سطح زیر نمودار A یک مستطیل است.) :

$$\Delta x_A=\Delta x_B \Rightarrow 15t'=\frac{t'+(t'-10)}{2}\times20 \Rightarrow t'=20s$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵۶ گزینه ۴ درست است.

معادلهٔ داده‌شده، همان معادله سرعت - مکان (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت است:

$$v^2=v_0^2+2a\Delta x \xrightarrow{x_0=-3m} v^2=v_0^2+2a(x+3) \Rightarrow v^2=v_0^2+6a+2ax$$

اگر این معادله را با معادلهٔ $v^2=12-8x$ مقایسه کنیم، مقادیر شتاب و سرعت اولیه را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} 2ax=-8x \Rightarrow \boxed{a=-4\frac{m}{s^2}} \\ v_0^2+6a=12 \xrightarrow{a=-4} v_0^2-24=12 \rightarrow v_0^2=36 \rightarrow v_0=\pm6 \end{cases}$$

چون متحرک در مبدأ زمان در قسمت‌های منفی محور بوده و درحال درو شدن از مبدأ است، پس در خلاف جهت محور در حرکت است و سرعت اولیه‌اش منفی است:

$$\boxed{v_0=-6\frac{m}{s}}$$

بنابراین معادلهٔ مکان - زمان این متحرک عبارت است از:

$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0 \rightarrow x=\frac{1}{2}(-4)t^2+(-6)t+(-3) \rightarrow \boxed{x=-2t^2-6t-3}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۵۷ گزینه ۱ درست است.

ابتدا باید معادلهٔ سرعت - زمان این دو متحرک را تعیین کنیم:

$$x = t^2 - 6t + 5 \Rightarrow a = 2\frac{m}{s^2}, v_0 = -6\frac{m}{s}$$

$$v = at + v_0 \Rightarrow v = 2t - 6$$

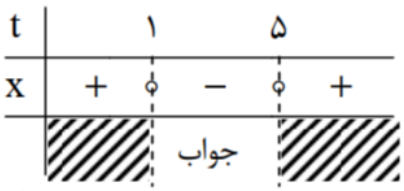
وقتی متحرک در خلاف جهت محور در حرکت است، باید سرعتش منفی باشد؛ بنابراین:

$$v = 2t - 6 < 0 \Rightarrow t < 3s$$

پس بازه زمانی Δt_1 برابر بازهٔ صفر تا $3s$ است، یعنی $\Delta t_1 = 3s$ وقتی متحرک در قسمت منفی محور در حرکت است، باید بردار مکان آن منفی باشد؛ بنابراین:

$$x = t^2 - 6t + 5 < 0 \Rightarrow (t-1)(t-5) < 0 \Rightarrow t_1 = 1s, t_2 = 5s$$

این نامعادله را تعیین علامت می‌کنیم:



پس بازهٔ زمانی Δt_2 برابر است با:

$$\Delta t_2 = 5 - 1 = 4s$$

پس:

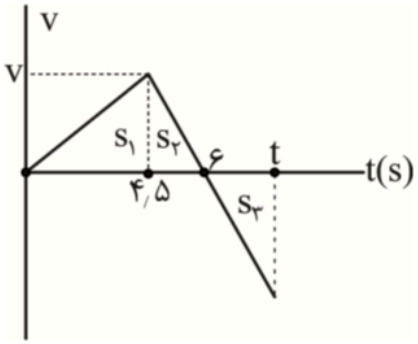
$$\boxed{\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = \frac{4}{3}}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۵۸ گزینه ۲ درست است.

اگر t لحظهٔ عبور مجدد از مکان اولیه باشد:



$$x_{(t)} = x_{\circ} \Rightarrow \Delta x = \circ$$

بنابراین مجموع جبری سطح محصور بین نمودار سرعت با محور زمان از لحظهٔ ۰ تا t باید صفر شود:

$$S_۱ + S_۲ + S_۳ = \circ \Rightarrow |S_۳| = S_۱ + S_۲$$

چون قاعدهٔ مثلث $S_۱$، سه برابر $S_۲$ است:

$$\frac{۴/۵}{۶ - ۴/۵} = ۳$$

$$\Rightarrow S_۱ = ۳S_۲$$

درحالی‌که ارتفاع (v) برابر دارند.

$$\frac{|S_۳|}{S_۲} = \frac{S_۱ + S_۲}{S_۲} = \frac{۳S_۲ + S_۲}{S_۲} = ۴$$

دو مثلث $S_۲$ و $S_۳$ متشابه‌اند و نسبت مساحت‌های آن‌ها با مربع نسبت اضلاع قائمه برابر است:

$$\frac{|S_۳|}{S_۲} = \left(\frac{t - ۶}{۶ - ۴/۵}\right)^۲ \Rightarrow ۴ = \left(\frac{t - ۶}{۱/۵}\right)^۲$$

$$۲ = \frac{t - ۶}{۱/۵} \Rightarrow \boxed{t = ۹s}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵۹ گزینه ۳ درست است.

$$v_{(۳)} = \circ$$

به علت تقارن سهمی، جابه‌جایی از لحظهٔ ۳s تا ۵s برابر ۲۴ متر است:

$$d_۱ = \frac{۱}{۲}a \times ۳^۲$$

اما حرکت از لحظهٔ ۳s تا ۵s، حرکت از حال سکون است:

$$d_۲ = \frac{۱}{۲}a \times ۶^۲$$

همچنین جابه‌جائی از ۳s تا ۹s:

$$\frac{d_۲}{d_۱} = \left(\frac{۶}{۳}\right)^۲ \Rightarrow \frac{d_۲}{۲۴} = ۴ \Rightarrow d_۲ = ۹۶m$$

سرعت متوسط در بازهٔ ۳s تا ۹s:

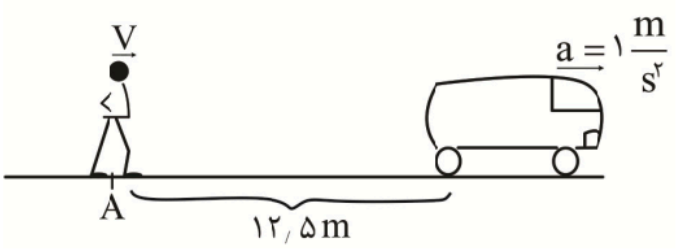
$$v_{av} = \frac{d_۲}{۹ - ۳} = \frac{v_۹ + v_۳}{۲}$$

$$\frac{۹۶}{۶} = \frac{v_۹ + \circ}{۲} \Rightarrow v_۹ = ۳۲\frac{m}{s}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۶۰ گزینه ۲ درست است.



نقطهٔ A را مبدأ مکان و این لحظه را که شخص در فاصلهٔ $۱۲/۵m$ است را $t=۰$ فرض می‌کنیم:

شخص : $x_۱ = vt$

اتوبوس : $x_۲ = \frac{۱}{۲}at^۲ + x_۰ = \frac{۱}{۲}t^۲ + ۱۲/۵$

فاصله از شخص تا اتوبوس : $d = x_۲ - x_۱ = \frac{۱}{۲}t^۲ + ۱۲/۵ - vt$

شرط رسیدن شخص به اتوبوس $d=۰$ است پس: $\frac{۱}{۲}t^۲ - vt + ۱۲/۵ = ۰$

شخص درصورتی می‌تواند به اتوبوس برسد که معادلهٔ فوق، ریشهٔ حقیقی و مثبتی داشته باشد، بنابراین باید $\Delta \geq ۰$ باشد.

$$\Delta = v^۲ - ۴(\frac{۱}{۲})(۱۲/۵) \geq ۰$$

$$v^۲ \geq ۲۵ \Rightarrow v \geq ۵\frac{m}{s}$$

پس حداقل تندی شخص $۵\frac{m}{s}$ باید باشد تا به اتوبوس برسد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

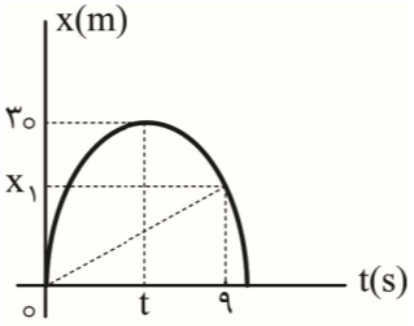
۴۶۱ گزینه ۲ درست است.

$$\Delta X = v_{av}.t \rightarrow x_۱ = ۲/۵ \times ۹ = ۲۲/۵m$$

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t = -\frac{۱}{۲}at^۲ + vt$$

(۱) $۳۰ - ۰ = -\frac{۱}{۲}at^۲$: در بازه صفر تا t

(۲) $۲۲/۵ - ۳۰ = \frac{۱}{۲}a(۹-t)^۲$: در بازه t تا $۹s$



از تقسیم رابطه ۱ بر ۲:

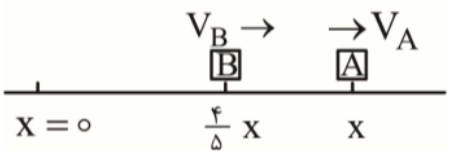
$$\frac{۳۰}{۷/۵} = \left(\frac{t}{۹-t}\right)^۲$$

$$\pm ۲ = \frac{t}{۹-t} \rightarrow \begin{matrix} t = ۶s \\ t = ۱۸s \text{ غ ق ق} \end{matrix}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۶۲ **گزینه ۳ درست است.**



لحظهٔ t : $x_A = x$ و $x_B = \frac{4}{5}x$

چون سرعت ثابت است با سرعت متوسط در هر بازهٔ زمانی برابر است.

$$v_A = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - 0}{t - 0} = \frac{x}{t}$$

$$v_B = \frac{\frac{4}{5}x - 0}{t - 0} = \frac{4x}{5t}$$

مدت زمانی که طول می‌کشد تا B از شروع حرکت به مکان x برسد $\Delta t = \frac{x - 0}{v_B} = \frac{x}{\left(\frac{4x}{5t}\right)} = \frac{5}{4}t$

در همین مدت A با سرعت ثابت $v_A = \frac{x}{t}$ به مکان x'_A رسیده است: $x'_A - 0 = v_A \times \Delta t = \frac{x}{t} \times \frac{5}{4}t \rightarrow x' = \frac{5}{4}x$

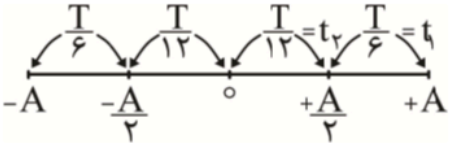
فاصلهٔ A از B : $\frac{5}{4}x - x = \frac{1}{4}x$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۶۳ گزینه ۴ درست است.

در حرکت هماهنگ ساده که از $x_0 = +A$ حرکت نوسانی آغاز می‌شود، نیمهٔ اول دامنه که یکسر آن نقطهٔ بازگشت است در مدت $\frac{T}{۶}$ و نیمهٔ دوم دامنه که یکسر آن مرکز نوسانی است در $\frac{T}{۱۲}$ طی می‌شود. به شکل زیر دقت کنید:



زیرا:

$$x = +\frac{A}{۲} = A\cos(\frac{۲\pi}{T}t_۱) \rightarrow \frac{۱}{۲} = \cos\frac{۲\pi}{T}t_۱$$

$$\frac{\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{T}t_۱ \rightarrow t_۱ = \frac{T}{۶}$$

و چون $t_۱ + t_۲ = \frac{T}{۴}$ است:

$$\frac{T}{۶} + t_۲ = \frac{T}{۴} \Rightarrow t_۲ = \frac{T}{۱۲}$$

با توجه به شکل:

$$۳(\frac{T}{۴}) + \frac{T}{۱۲} = ۵ \Rightarrow \frac{۱۰T}{۱۲} = ۵ \Rightarrow T = ۶s$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۶} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{۳}\ \frac{rad}{s}$$

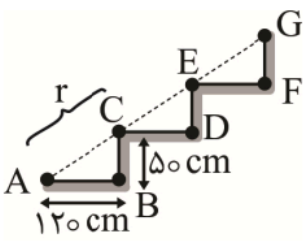
$$E = \frac{۱}{۲}m\omega^۲A^۲ \Rightarrow ۰/۴\times۱۰^{-۳} = \frac{۱}{۲}m\times\frac{\pi^۲}{۹}\times(۴\times۱۰^{-۲})^۲$$

$$۴\times۱۰^{-۴} = \frac{m\times\pi^۲\times۸\times۱۰^{-۴}}{۹} \Rightarrow m = \frac{۳۶}{۸\pi^۲}$$

$$\pi^۲ \simeq ۱۰ \Rightarrow m = \frac{۹}{۲۰}kg = \frac{۹۰۰۰}{۲۰}g = ۴۵۰g$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - دشوار)

۴۶۴ گزینه ۱ درست است.



$$r = \sqrt{۱۲۰^۲ + ۵۰^۲} = ۱۳۰cm$$

جابه‌جایی $d = ۳\times r = ۳\times۱۳۰cm$

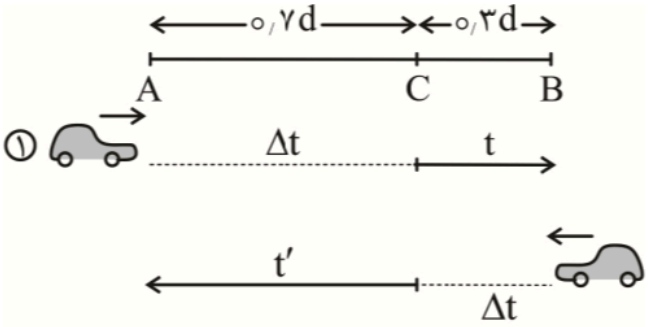
حداقل مسافت $\ell = ۳\times(۱۲۰+۵۰) = ۳\times۱۷۰cm$

$$\frac{S_{av}}{V_{av}} = \frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{\frac{d}{\Delta t}} = \frac{\ell}{d} = \frac{۳\times۱۷۰}{۳\times۱۳۰} = \frac{۱۷۰}{۱۳۰} = \frac{۱۷}{۱۳}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۶۵ گزینه ۲ درست است.

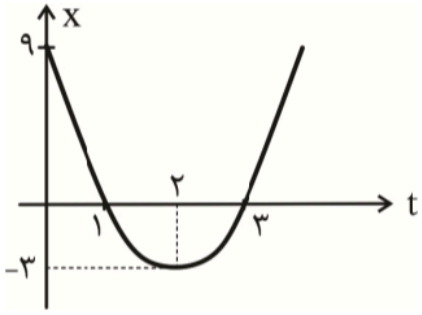


$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{\Delta x_1}{\Delta t}}{\frac{\Delta x_2}{\Delta t}}=\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2}=\frac{0/7d}{0/3d}=\frac{7}{3}$$

$$t=\frac{0/3d}{V_1}\ ,\ t'=\frac{0/7d}{V_2}\rightarrow\frac{t'}{t}=\frac{0/7d}{0/3d}\times\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{3}\times\frac{7}{3}=\frac{49}{9}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

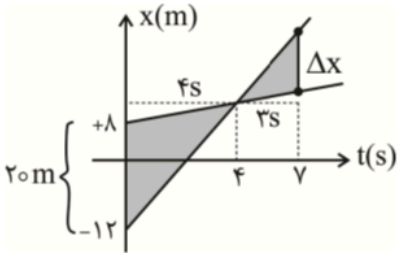
۴۶۶ گزینه ۳ درست است.



$$x=3(t^2-4t+3)=3(t-1)(t-3)$$
$$t=2\rightarrow x=3(1)(-1)=-3m$$
$$\ell=2\times3=6m$$
$$S_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{6}{2}=3\frac{m}{s}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

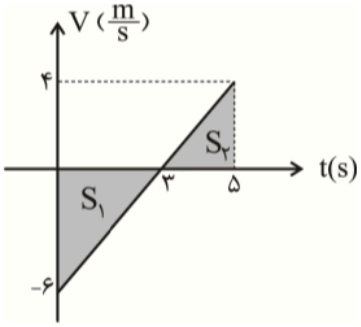
۴۶۷ گزینه ۲ درست است.



$$\frac{\Delta x}{3}=\frac{20}{4}\rightarrow\Delta x=15m$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۶۸ **گزینه ۳ درست است.**



$$x = t^{۲} - ۶t + ۵$$

$$V = ۲t - ۶$$

$$S_{۱} = -۹m \ , \ S_{۲} = +۴m$$

$$\ell = |S_{۱}| + |S_{۲}| = ۹ + ۴ = ۱۳m \qquad \Delta x = S_{۱} + S_{۲} = -۹ + ۴ = -۵m$$

$$\frac{S_{av}}{V_{av}} = \frac{\ell}{|\Delta x|} = \frac{۱۳}{۵} = ۲/۶$$

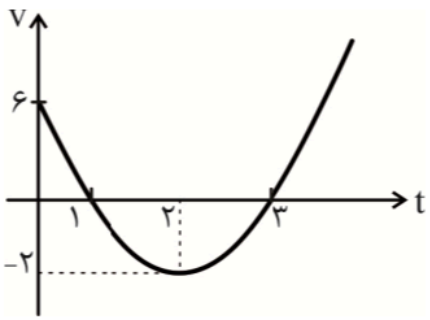
(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۶۹ **گزینه ۳ درست است.**

یک راه خوب برای درک نحوه حرکت جسم رسم نمودار سرعت - زمان است.

$$v = ۲t^{۲} - ۸t + ۶ = ۲(t^{۲} - ۴t + ۳) = ۲(t - ۱)(t - ۳)$$

متحرک از $t = ۱s$ تا $t = ۳s$ در خلاف جهت محور حرکت می‌کند ← گزینه ۱ درست است.



متحرک درلحظات $t = ۱s$ و $t = ۳s$ متوقف می‌شود. ← گزینه ۲ درست است.

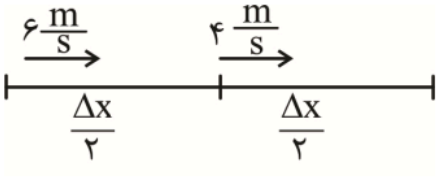
متحرک از $t = ۰$ تا $t = ۱s$ کند شونده و از $t = ۱s$ تا $t = ۲s$ تندشونده حرکت می‌کند. ← گزینه ۳ نادرست است.

متحرک در لحظات $t_{۱} = ۱s$ و $t_{۲} = ۳s$ تغییر جهت می‌دهد. ← گزینه ۴ درست است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

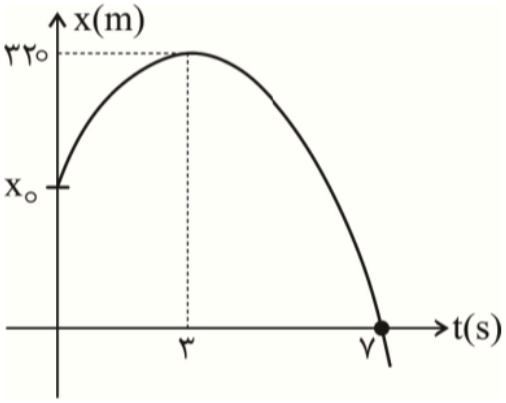
۴۷۰ گزینه ۲ درست است.



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t_1+\Delta t_2}=\frac{\Delta x}{\frac{\frac{\Delta x}{2}}{6}+\frac{\frac{\Delta x}{2}}{4}}=\frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{12}+\frac{\Delta x}{8}}=\frac{\Delta x}{\Delta x(\frac{2+3}{24})}=\frac{24}{5}=4/8\frac{m}{s}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷۱ گزینه ۳ درست است.



$$x=\frac{1}{2}at^2+v_0t+x_0\,,v=at+v_0$$

$$t=3\rightarrow x=320\rightarrow 320=\frac{9}{2}a+3v_0+x_0$$

$$t=3\rightarrow v=0\rightarrow 0=3a+v_0$$

$$t=7\rightarrow x=0\rightarrow 0=\frac{49}{2}a+7v_0+x_0$$

$$\rightarrow x_0=140\,m, v_0=120\frac{m}{s}, a=-40\frac{m}{s^2}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷۲ گزینه ۱ درست است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۷۳ **گزینه ۲ درست است.**

$$(۰,۴)\ S \text{ بازه زمانی } \Delta x = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \times \Delta t \rightarrow -۱۶ = \frac{v_۱ + ۰}{۲} \times ۴ \rightarrow v_۱ = -۸\frac{m}{s}$$

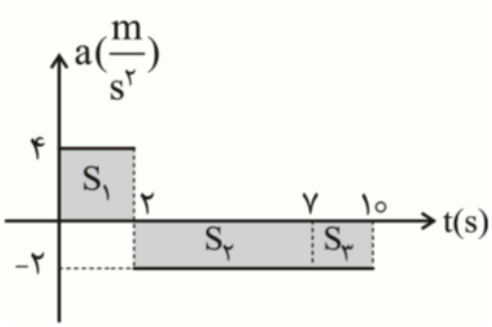
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۰-(-۸)}{۴} = ۲\frac{m}{s^۲} \rightarrow v = ۲t - ۸$$

$$t = ۵s \rightarrow v = ۲\frac{m}{s} \qquad P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\Delta K}{\Delta t} = \frac{\frac{۱}{۲} \times ۲ \times (۴ - ۶۴)}{۵} = -۱۲W$$

(فصل ۳، دهم و فصل ۱، دوازدهم)

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷۴ **گزینه ۳ درست است.**



$$v_{t=۲} = v_۱ = v_۰ + S_۱ = ۲ + ۸ = ۱۰\frac{m}{s}$$

$$v_{t=۷} = v_۲ = v_۱ + S_۲ = ۱۰ + (-۱۰) = ۰$$

$$v_{t=۱۰} = v_۳ = v_۲ + S_۳ = ۰ + (-۶) = -۶\frac{m}{s}$$

$$\Delta x_۱ = \frac{v_۰ + v_۱}{۲} \times \Delta t = \frac{۲ + ۱۰}{۲} \times ۲ = ۱۲m$$

$$\Delta x_۲ = \frac{v_۱ + v_۲}{۲} \times \Delta t = \frac{۱۰ + ۰}{۲} \times ۵ = ۲۵m$$

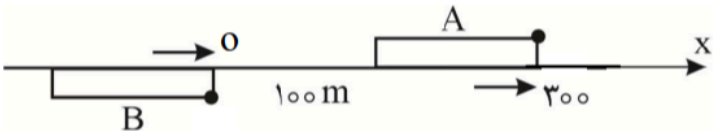
$$\Delta x_۳ = \frac{v_۲ + v_۳}{۲} \times \Delta t = \frac{۰ + (-۶)}{۲} \times ۳ = -۹m$$

$$l = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| + |\Delta x_۳| = ۱۲ + ۲۵ + ۹ = ۴۶ \rightarrow S_{av} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{۴۶}{۱۰} = ۴/۶\frac{m}{s}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۷۵ **گزینه ۲ درست است.**



جلوی قطارهای A و B را به‌عنوان دو نقطه بررسی می‌کنیم. هنگامی که قطار B از قطار A به‌طور کامل جلو می‌زند، نقطهٔ B از نقطهٔ A، ۳۰۰m جلوتر است.

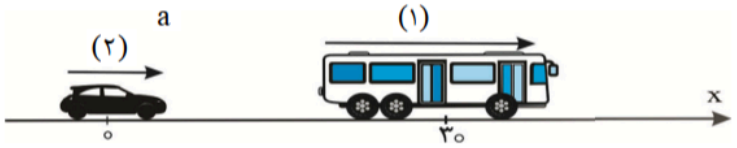
$$\begin{cases} x_A = vt + x_0 = 5t + 300 \\ x_B = vt + x_0 = 15t + 0 = 15t \end{cases} \quad x_B = x_A + 300$$

$$\rightarrow 15t = (5t + 300) + 300 \rightarrow 10t = 600 \rightarrow t = 60s$$

$$\Delta x_A = v_A \Delta t = 5 \times 60 = 300m$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷۶ **گزینه ۲ درست است.**



اتوبوس $x_1 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = \frac{-1}{2}t^2 + 10t + 30$

اتومبیل $x_2 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 = \frac{1}{2}at^2 + 20t$

$$\Delta x = 0 \rightarrow x_1 - x_2 = \frac{-1}{2}t^2 + 10t + 30 - (\frac{1}{2}at^2 + 20t) = \frac{-(1+a)}{2}t^2 - 10t + 30 = 0$$

برای آنکه این دو اتومبیل تصادف نکنند باید معادله Δx ریشه نداشته باشد.

$$B^2 - 4AC = 0 \rightarrow 100 + 4 \times (\frac{1+a}{2})(30) = 0 \rightarrow \frac{1+a}{2} = \frac{-5}{6}$$

$$1 + a = \frac{-10}{6} \rightarrow a = \frac{-10}{6} - 1 = \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3}\frac{m}{s^2} \rightarrow |a| = \frac{8}{3}\frac{m}{s^2}$$

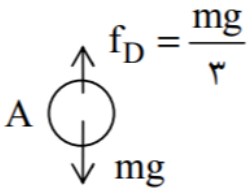
روش دوم: سرعت نسبی

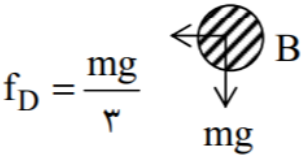
$$d = \frac{v_0^2}{2a} \rightarrow 30 = \frac{(10)^2}{2(a-1)} \rightarrow a - 1 = \frac{5}{30} = \frac{5}{3} \rightarrow a = \frac{8}{3}\frac{m}{s^2}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۷۷ گزینه ۳ درست است.





$$a_A = \frac{mg - \frac{mg}{3}}{m} = g - \frac{g}{3} = \frac{2}{3}g$$

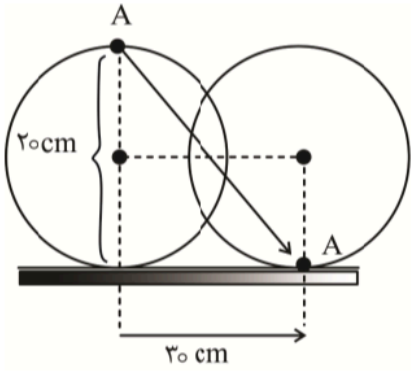
$$a_B = \frac{\sqrt{(mg)^2 + (\frac{mg}{3})^2}}{m} = \frac{mg\sqrt{1 + \frac{1}{9}}}{m} = \frac{\sqrt{10}}{3}g$$

$$\frac{a_A}{a_B} = \frac{\frac{2}{3}g}{\frac{\sqrt{10}}{3}g} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷۸ گزینه ۴ درست است.

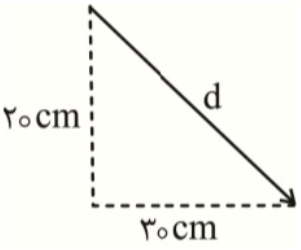
ابتدا باید بررسی کنیم چرخ چند دور می‌زند.



$$n = \frac{\ell}{2\pi r} = \frac{30}{2 \times 3 \times 10} = \frac{1}{2}$$

پس نقطهٔ **A** نصف محیط دایره را طی می‌کند و به پایین چرخ می‌رود.

حال جابه‌جایی نقطهٔ **A** را بررسی می‌کنیم:

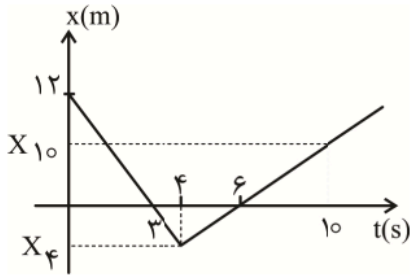


$$d = \sqrt{20^2 + 30^2} = 10\sqrt{13}\,cm$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۷۹ **گزینه ۳ درست است.**



ابتدا با تشابه مثلث، مکان را در لحظه‌های $t_1 = 4s$ و $t_2 = 10s$ به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{x_4}{12} = \frac{1}{3} \rightarrow x_4 = 4m \qquad \frac{x_{10}}{4} = \frac{4}{2} \rightarrow x_{10} = 8m$$

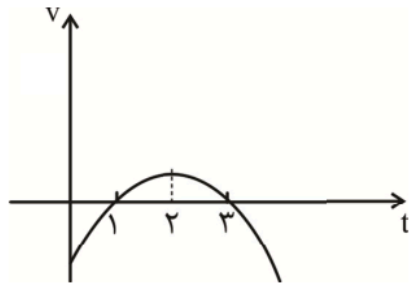
$$\frac{\ell}{|\Delta x|} = \frac{16+12}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۸۰ **گزینه ۲ درست است.**

یک راه خوب رسم نمودار $v-t$ است.

$$v = -2t^2 + 8t - 6 = -2(t^2 - 4t + 3) = -2(t-1)(t-3)$$



قسمتی از نمودار مدنظر است که مثبت باشد و از محور t دور شود. یعنی $t = 1s$ تا $t = 2s$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۸۱ **گزینه ۲ درست است.**

$$S_{av} = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow 2/6 = \frac{(6 - x_0) + (6 - (-10))}{10} \Rightarrow x_0 = -4m$$

شیب خط در هر نقطه برابر است با سرعت در آن لحظه:

$$v_0 = (t = 0) \text{ شیب خط در } = \frac{0 - (-4)}{2} = 2\frac{m}{s}$$

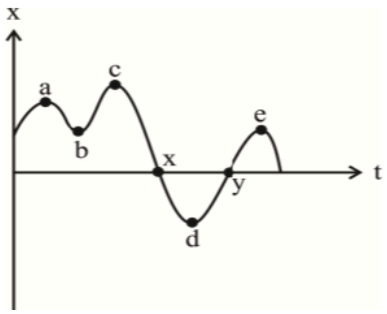
$$v_{(10s)} = (t = 10s) \text{ شیب خط در } = \frac{-10 - (6)}{4} = -4\frac{m}{s}$$

$$a_{av}(0 - 10s) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-4 - 2}{10} = -0/6\frac{m}{s^2}$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۸۲ **گزینه ۳ درست است.**

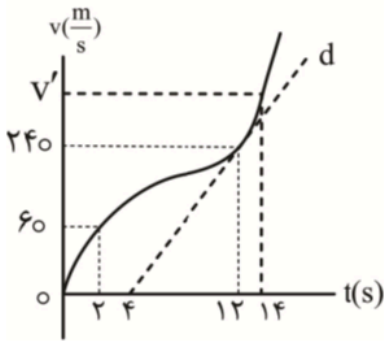


متحرک در نقاط e,d,c,b,a تغییر جهت می‌دهد.

بردار مکان متحرک در نقاط y,x تغییر جهت می‌دهد.

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۸۳ **گزینه ۱ درست است.**



شتاب در لحظهٔ $t=۱۲s$ برابر است با شیب خط مماس بر نمودار سرعت - زمان در این لحظه (شیب خط **d**).

با توجه به این که شتاب لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ $t=۱۲s$ ، با شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۱۴s$ برابر است، داریم:

$$a_{t=۱۲s}=a_{av(۲-۱۴)s}\Rightarrow \text{شیب خط d}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow \frac{۲۴۰}{۱۲-۴}=\frac{v'-۶۰}{۱۴-۲}\Rightarrow v'=۴۲۰\frac{m}{s}$$

دو ثانیهٔ اول بازهٔ زمانی $t_۱=۰$ تا $t_۲=۲s$ و دو ثانیهٔ هفتم بازهٔ زمانی $t_۱=۱۲s$ تا $t_۲=۱۴s$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

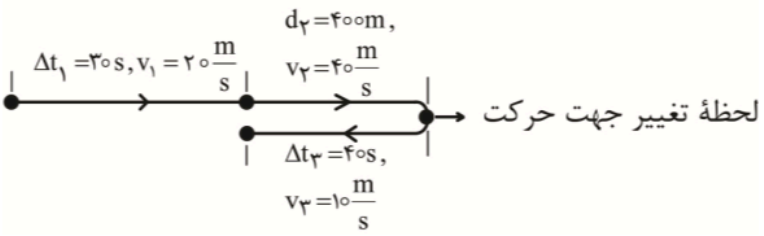
$$a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}\Rightarrow \frac{a_{av(۰-۲)s}}{a_{av(۱۲-۱۴)s}}=\frac{\frac{۶۰-۰}{۲-۰}}{\frac{۴۲۰-۲۴۰}{۱۴-۱۲}}=\frac{۶۰}{۱۸۰}=\frac{۱}{۳}$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۸۴ **گزینه ۳ درست است.**

ابتدا مسیر حرکت جسم را رسم می‌کنیم:



جابه‌جایی متحرک در هریک از مراحل ۱ و ۳ و زمان جابه‌جایی متحرک در مرحلهٔ ۲ برابر است با:

$$d_1 = v_1 . \Delta t_1 = 20 \times 30 = 600m \Rightarrow d_1 = 600m$$

$$d_2 = v_2 . \Delta t_2 \Rightarrow 400 = 40 \times \Delta t_2 \Rightarrow \Delta t_2 = 10s$$

$$d_3 = v_3 . \Delta t_3 = 10 \times 40 = 400m \Rightarrow d_3 = 400m$$

جابه‌جایی کل برابر است با:

$$d_T = d_1 + d_2 - d_3 = 600 + 400 - 400 = 600m$$

مدت زمان کل برابر است با:

$$\Delta t_T = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 = 30 + 10 + 40 = 80s$$

حال سرعت متوسط در کل مسیر برابر است با:

$$v_{av} = \frac{d_T}{\Delta t_T} = \frac{600}{80} = 7/5\frac{m}{s}$$

بنابراین سرعت متوسط برحسب کیلومتر بر ساعت برابر است با:

$$v_{av} = 7/5 \times 3/6 = 27\frac{km}{h}$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۸۵ گزینه ۱ درست است.

ابتدا سرعت هریک از متحرک‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$v_B = B\text{ خط شیب} = \frac{0-(-200)}{10-0} = 20\frac{m}{s} \qquad v_A = A\text{ خط شیب} = \frac{200-100}{10-0} = 10\frac{m}{s}$$

با توجه به اینکه حرکت هر دو متحرک به‌صورت یکنواخت (سرعت ثابت) است؛ می‌توان معادلهٔ مکان - زمان آن‌ها را نوشت:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = 10t + 100 \\ x_B = 20t - 200 \end{cases}$$

فاصلهٔ دو متحرک در دو لحظه برابر ۲۰ متر است. یک‌بار قبل از رسیدن دو متحرک به یکدیگر و بار دیگر پس از رسیدن به یکدیگر؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$|x_B - x_A| = 20 \Rightarrow \begin{cases} x_B - x_A = 20 \Rightarrow 20t - 200 - (10t + 100) = 20 \Rightarrow 10t = 320 \Rightarrow t = 32s \\ x_B - x_A = -20 \Rightarrow 20t - 200 - (10t + 100) = -20 \Rightarrow 10t = 280 \Rightarrow t = 28s \end{cases}$$

بازهٔ زمانی که فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر کمتر یا مساوی ۲۰ متر است، برابر است با: $\Delta t = 32 - 28 = 4s$

حال می‌توان جابه‌جایی دو متحرک را در این بازهٔ زمانی به‌دست آورد:

$$\Delta x = v.\Delta t \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_A = 10 \times 4 = 40m \\ \Delta x_B = 20 \times 4 = 80m \end{cases}$$

بنابراین اختلاف جابه‌جایی دو متحرک برابر است با:

$$\Delta x_B - \Delta x_A = 80 - 40 = 40m$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

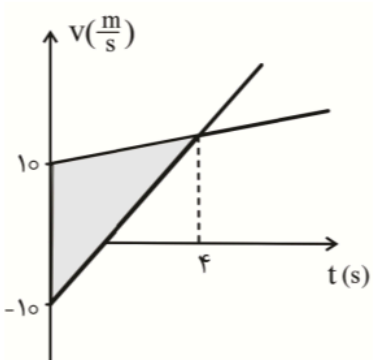
۴۸۶ گزینه ۱ درست است.

$$\Delta x_1 = v_1 \Delta t_1 = 6 \times 10 = 60m$$
$$\Delta x_2 = v_2 \Delta t_2 = (-6) \times (5) = -30m$$
$$\Delta x_T = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 60 + (-30) = 30m$$
$$v_{av} = \frac{\Delta x_T}{\Delta t_T} = \frac{30}{10+5} = 2\frac{m}{s^2}$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۸۷ **گزینه ۴ درست است.**

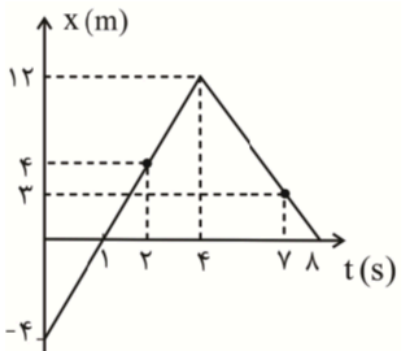


فاصلهٔ دو متحرک برابر بامساحت مثلث هاشورخورده است.

$$S=\frac{۲۰\times۴}{۲}=۴۰\,m$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

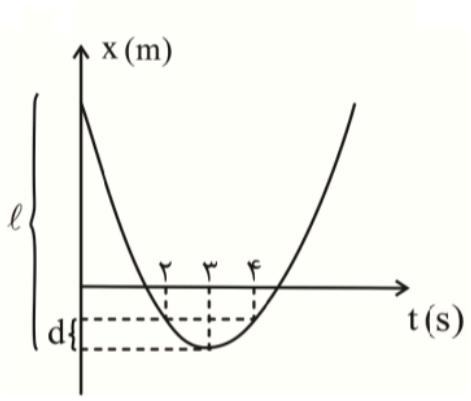
۴۸۸ **گزینه ۲ درست است.**



$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۳-۴}{۷-۲}=\frac{-۱}{۵}=-۰/۲\frac{m}{s}$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۸۹ **گزینه ۳ درست است.**



$$S_{av}=\frac{۲d}{۲}=۵\rightarrow d=۵\,m$$

$$\Delta x=\frac{۱}{۲}a\Delta t^{۲}\rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} d=\frac{۱}{۲}a(۱)^{۲}=\frac{۱}{۲}a \\ \ell=\frac{۱}{۲}a(۳)^{۲}=\frac{۹}{۲}a \end{array}\right\}\rightarrow \ell=۹d=۴۵m$$

$$\Delta x=\frac{v_{۱}+v_{۲}}{۲}\times\Delta t\rightarrow -۴۵=\frac{v_{۰}+۰}{۲}\times۳\rightarrow v_{۰}=-۳۰\frac{m}{s}$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۹۰ **گزینه ۱ درست است.**

$$x=\frac{۱}{۲}t^۲-۳t+\frac{۵}{۲}=\frac{۱}{۲}(t^۲-۶t+۵)=\frac{۱}{۲}(t-۱)(t-۵)$$

بردار مکان - زمان متحرک در دو لحظهٔ $t_۱=۱s$ و $t_۲=۵s$ تغییر جهت می‌دهد.

لحظهٔ تغییر جهت متحرک $t'=\frac{t_۱+t_۲}{۲}=\frac{۱+۵}{۲}=۳s$

$$t'=۳s\rightarrow x'=\frac{۱}{۲}(۳-۱)(۳-۵)=-۲m\rightarrow$$

مسافت طی‌شده در بازه $t_۱=۱s$ تا $t_۲=۵s$ $\ell=۲\times۲=۴m$

$$S_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{۴}{۴}=۱\frac{m}{s}$$

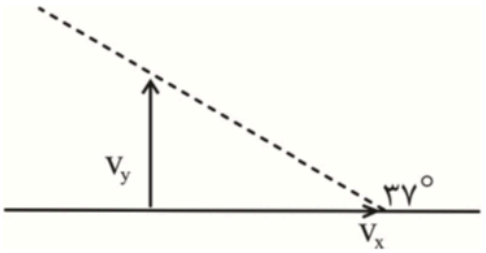
(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۹۱ **گزینه ۲ درست است.**

$$\frac{S_{av}}{|v_{av}|}=\frac{\frac{\ell}{\Delta t}}{\frac{|\Delta x|}{\Delta t}}=\frac{\ell}{|\Delta x|}=\frac{۳۶}{۴}=۹$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۹۲ **گزینه ۳ درست است.**



$$\frac{v_y}{v_x}=\tan ۳۷^\circ=\frac{۳}{۴}$$

$$\rightarrow v_x=\frac{۴}{۳}v_y=\frac{۴}{۳}\times۹=۱۲\frac{m}{s}$$

$$\Delta x=v_x\times\Delta t=۱۲\times۴=۴۸m$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۹۳ **گزینه ۴ درست است.**

$$S_{av}=v_{av}=\frac{\Delta x_۱+\Delta x_۲}{\Delta t_۱+\Delta t_۲}=\frac{\frac{x}{۲}+\frac{x_۲}{۲}}{\frac{x}{۲۰}+\frac{x}{۱۰}}=\frac{x}{x(\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{۲۰})}=\frac{۱}{\frac{۱}{۴۰}+\frac{۱}{۲۰}}\rightarrow S_{av}\frac{۱}{\frac{۳}{۴۰}}=\frac{۴۰}{۳}\frac{m}{s}$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۹۴ **گزینه ۴ درست است.**

$$\Delta x = \frac{v_1 + v_2}{2} \times \Delta t \rightarrow 90 = \frac{20 + v_2}{2} \times 4 \rightarrow v_2 = 25 \frac{m}{s}$$

$$\xrightarrow{\times 3/6} v_2 = 90 \frac{km}{h}$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۹۵ **گزینه ۲ درست است.**

$$\Delta x = \frac{v_0 + v}{2} \times \Delta t \rightarrow 100 = \frac{v_0 + 36}{2} \times 5 \rightarrow v_0 + 36 = 40$$

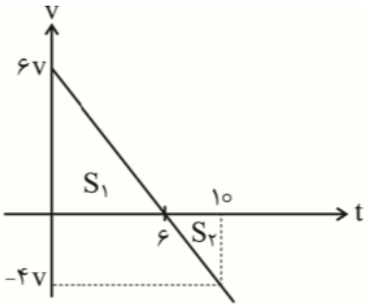
$$\rightarrow v_0 = 4 \frac{m}{s}$$

(فیزیک (۳) - فصل ۱ ، حرکت با شتاب ثابت)

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۹۶ **گزینه ۱ درست است.**

یک راه خوب رسم نمودار $v-t$ است.



$$s_1 = \frac{6v \times 6}{2} = 18v$$

$$s_2 = \frac{(-4v)(4)}{2} = -8v$$

مسافت $\ell = |s_1| + |s_2| = 18v + 8v = 26v$

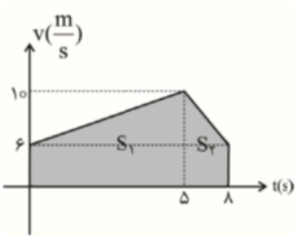
جابه‌جایی $\Delta x = s_1 - s_2 = 18v - 8v = 10v$

$$\frac{\ell}{(\Delta x)} = \frac{26v}{10v} = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}$$

(فیزیک (۳) - فصل ۱ ، حرکت با شتاب ثابت)

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

۴۹۷ **گزینه ۳ درست است.**



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S_1 + S_2}{8} = \frac{(\frac{6+10}{2} \times 5) + (\frac{10+6}{2} \times 3)}{8} = \frac{40+24}{8} = \frac{64}{8} = 8 \frac{m}{s}$$

(فیزیک (۳) - فصل ۱ ، سطح نمودار سرعت - زمان)

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir

۴۹۸ گزینه ۴ درست است.

ابتدا سرعت را در هر یک از لحظات $t_1 = ۲s, t_2 = ۱۴s$ به‌دست می‌آوریم:

$$v_{t=۲s} = ۰$$

$$v_{t=۱۴s} = d \text{ شیب خط} = \frac{۱۲-۵}{۱۴} = \frac{۱}{۲}\frac{m}{s}$$

شتاب متوسط این متحرک برابر است با:

$$\alpha_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{۱}{۲}-۰}{۱۴-۲} = \frac{۱}{۲۴}\frac{m}{s^۲}$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۴۹۹ گزینه ۴ درست است.

مسافت طی‌شدهٔ کل: $\Delta x = ۶۰+۴۰ = ۱۰۰m$

رابطهٔ جابه‌جایی و سرعت نهایی: $\Delta x = \frac{-۱}{۲}at^۲ + vt$

$$۱۰۰ = \frac{-۱}{۲}\times ۸ \times t^۲ + ۴۰t$$

صحیح $t = ۵s$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۵۰۰ گزینه ۲ درست است.

درلحظهٔ $t = ۵s$

$$v = at + v_۰ \rightarrow ۰ = ۵a + v_۰ \rightarrow v_۰ = -۵a$$

درلحظهٔ $t = ۸s$

$$v_۸ = ۸a + v_۰ = ۸a - ۵a = ۳a$$

$$|\Delta x_t| = \left|\frac{v_۰ + v_۵}{۲}\times ۵\right| = \left|\frac{-۵a + ۰}{۲}\times ۵\right| = ۱۲/۵a$$

$$\Delta x_t = \frac{v_۵ + v_۸}{۲}\times ۳ = \frac{۰ + ۳a}{۲}\times ۳ = ۴/۵a$$

$$S_{av} = \frac{\ell}{t} = \frac{۱۲/۵a + ۴/۵a}{۸} = \frac{۱۷a}{۸} = ۱۷\frac{m}{s}$$

$$\rightarrow a = ۸\frac{m}{s^۲}$$

(سنجش ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - دشوار)

SanjeshCloud www.SanjeshCloud.ir